

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ПРИ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЗОНАНСНОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ

К.т.н. Ю.В. Кузнецов, В.Ю. Щекатуров, А.Б. Бабев

Введение

Функционирование различных объектов может сопровождаться резонансными электромагнитными излучениями, охватывающими широкий диапазон частот. Возбудителем таких излучений являются различные физические процессы, связанные с изменением энергетического состояния объекта. Примером могут служить процессы в двигателях внутреннего сгорания, сопровождающиеся искрообразованием, электростатические разряды, возникающие при движении летательного аппарата, возбуждения от факела реактивного двигателя ракет и др. Возбуждаемые этими процессами электромагнитные колебания носят затухающий осциллирующий характер, частота и показатели затухания которых определяются формой и размерами объекта.

С помощью пассивных радиоэлектронных средств можно анализировать излучения объектов в широком диапазоне частот. При этом необходимо организовать наилучшую обработку принимаемого сигнала с тем, чтобы выделить полезный сигнал с требуемыми параметрами на фоне шумов и других мешающих сигналов. Обнаружение сигнала может быть совмещено с оценкой его параметров. Математически модель рассеиваемого сигнала описывается положением нулей и полюсов на комплексной плоскости, причем положение последних практически инвариантно по отношению к ракурсу объекта, что дает возможность идентифицировать объект по результатам оценки полюсов сигнала.

Существующие методы оценки параметров резонансной модели [1, 2] имеют шумовой порог работоспособности порядка 15 дБ. При таких отношениях сигнал/шум эффективно использование метода разложения по сингулярным числам. Используя разделение информации, содержащейся в автокорреляционной матрице или матрице данных, на два векторных подпространства (подпространство сигнала и подпространство шума) удается повысить характеристики спектрального оценивания. Однако в известных методах обработки часто используется пониженный ранг аппроксимации входной последовательности без учета теплицевой или ганкелевой структуры матрицы данных [1]. Ввиду этого предложено учитывать свойства этих структур при понижении ранга матрицы данных с использованием сингулярного разложения. Разработанный алгоритм позволяет понизить уровень шумов во входной последовательности и, как показало

моделирование, применим в сочетании со многими методами оценки параметров резонансной модели.

1. Теория метода предварительной обработки

Представим отсчеты обрабатываемого сигнала в следующем виде [2]:

$$y_k = x_k + n_k = \sum_{t=1}^M |b_t| \exp[(\alpha_t + j\omega_t)k + j\phi_t] + n_k, \quad (1)$$

где $k = 0, 1, \dots, N-1$ — номера отсчетов, N — число отсчетов данных, M — порядок резонансной модели, n_k — отсчеты шума, $|b_t|$, ϕ_t , α_t и ω_t — значения амплитуд, фаз, коэффициентов затухания и частот соответственно.

Под теплицевой структурой понимают матрицу X размера $m \times n$ с такими элементами x_{ij} , что $x_{ij} = x_{i-j}$; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Если формирующий эту матрицу вектор x имеет индексы $k = 0, \dots, (m+n-2)$, то можно записать выражение для элементов теплицевой матрицы в виде $x_{ij} = x_{i-j+n-1}$. Заметим, что такая матрица не обязательно квадратная, но все ее элементы, расположенные на любой диагонали, одинаковы:

$$X = \begin{bmatrix} x_{L-1} & x_{L-2} & \dots & x_0 \\ x_L & x_{L-1} & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-2} & x_{N-3} & \dots & x_{N-L-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где L — произвольное целое число. Ганкелева матрица обладает тем же свойством для элементов, расположенных на любой ее кроссдиагонали.

Рассмотрим одно важное свойство таких матриц [1]. Пусть отсчеты данных x_k являются результатом суммирования M комплексных экспонент без шума как в (1). Тогда для любого числа L ($L > M$) теплицева или ганкелева матрица вида (2), составленная из x_k , есть вырожденная матрица с рангом M и подматрицей $M \times M$ полного ранга. Справедливо и обратное утверждение: если имеется вырожденная теплицева или ганкелева структура с рангом M и подматрицей $M \times M$ полного ранга, то элементы x_k такой матрицы есть отсчеты суммы комплексных экспонент вида (1).

Таким образом, если сигнал имеет вид (1) без шума, то существует прямая связь между числом затухающих экспонент и рангом матрицы X . В случае зашумленной последовательности y_k , матрица данных Y , составленная по

тому же принципу, что и матрица X . всегда будет иметь полный ранг равный $\min(m, n)$, вместе с тем ее "эффективный" ранг [3] по-прежнему будет равен числу M .

Применение метода разложения по сингулярным числам позволяет определить "эффективный" ранг матриц. Теорема разложения утверждает [1], что всегда найдутся унитарные матрицы U и V размером соответственно $m \times m$ и $n \times n$, такие, что:

$$Y = U \Sigma V^H, \quad (3)$$

где Σ — некоторая матрица размера $m \times n$, такая, то все ее элементы, за исключением, возможно, некоторых диагональных элементов, равны нулю. Неотрицательные диагональные элементы расположены в убывающем порядке и называются сингулярными числами (СЧ) матрицы Y , причем количество значимых СЧ определяет величину M .

Положив наименьшие по своей величине (незначимые) СЧ равными нулю, получим аппроксимирующую матрицу \tilde{Y} ранга M . Если до разложения матрица Y имела вид (2), то после выполнения такой процедуры она теряет вышерассмотренное свойство теплицевой или ганкелевой структуры. Заметим, что матрица \tilde{Y} всегда отлична от матрицы X , поскольку влияние шума сказалось в весах значимых СЧ.

Ввиду сказанного предложим использовать понижение ранга матрицы с использованием сингулярного разложения совместно с сохранением теплицевой или ганкелевой структуры. Сформулируем основные этапы такого метода. Пусть задана последовательность y_k , $k = 0, \dots, n+m-2$, вида (1). Составим из элементов y_k матрицу Y аналогично матрице X (2). Применим операцию сингулярного разложения и найдем с помощью (3) аппроксимирующую матрицу \tilde{Y} ранга M . Оставим только M наиболее значимых СЧ (а остальным приравняем нулю). В результате элементы матрицы \tilde{Y} , расположенные на ее диагоналях (или кроссдиагоналях в случае ганкелевой структуры), уже не будут идентичны. В соответствии с предложенным методом необходимо восстановить структуру матрицы вида (2), сделав ее вновь теплицевой (или ганкелевой). После этого можно рассчитывать на уменьшение шумового влияния, "просочившегося" в подпространство сигнала.

Один из возможных путей восстановления структуры матрицы \tilde{Y} состоит в формировании такой матрицы Y' , которая была бы наилучшим приближением матрицы X по критерию минимума Евклидовой нормы [3]: $\|Y' - X\|_E$. Предложим для матрицы \tilde{Y} размера $m \times n$ ($m < n$) следующую процедуру восстановления:

$$y'_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{y}_{i, n+i-k-1} & \text{при } k = 0 \dots (m-1) \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{y}_{i, n+i-k-1} & \text{при } k = m \dots (n-2) \\ \frac{1}{n+m-k-1} \sum_{i=1}^{n+m-k-1} \tilde{y}_{-n+i+k+1, i} & \text{при } k = (n-1) \dots (n+m-2) \end{cases}, \quad (4)$$

где \tilde{y}_{ij} — элементы матрицы \tilde{Y} , y'_k — элементы восстановленной матрицы Y' . Фактически смысл восстановления (4) заключается в нахождении среднеарифметического значения каждой диагонали (кроссдиагонали в случае ганкелевой структуры) матрицы \tilde{Y} . Далее из отсчетов y'_k формируется матрица Y' вида (2).

Полученная матрица Y' , как правило, имеет полный или несколько пониженный ранг. Применив вышеописанную процедуру уже к матрице Y' , можно получить дополнительное уменьшение влияния шума на подпространство сигнала. Ясно, что процедуру целесообразно повторять до тех пор, пока ранг найденной на j -ой итерации матрицы Y^j не станет равным M . При машинном моделировании, когда число разрядной сетки компьютера ограничено, более целесообразно использовать другой критерий окончания работы алгоритма, а именно, абсолютное значение величины $\delta > \|Y^j - X\|_E$. Итерацию j , при которой величина $\|Y^j - X\|_E$ перестает значительно изменяться, можно считать последней, а матрицу Y^j — наилучшим приближением матрицы X . Заметим, что в общем случае Y^j точно не равно X ни при каком j , а окончательная, неуменьшаемая в результате любого числа итераций, ошибка зависит от исходного отношения сигнал/шум.

Приведем математическое доказательство состоятельности предложенного метода на примере первой итерации. Покажем, что

$$\|Y' - X\|_E \leq \|\tilde{Y} - X\|_E. \quad (5)$$

Сравним квадрат Евклидовой нормы разности матрицы Y' и исходной матрицы X с квадратом Евклидовой нормы разности матриц \tilde{Y} и X :

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y} - X\|_E^2 &= \sum_i \sum_j |\tilde{y}_{i,j} - x_{i,j}|^2 = \\ &= \sum_i \sum_j |(\tilde{y}_{i,j} - y'_{i,j}) + (y'_{i,j} - x_{i,j})|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Воспользовавшись формулой разложения квадрата модуля

$$|a + b|^2 = |a|^2 + ab^* + a^*b + |b|^2, \quad (7)$$

получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y} - X\|_E^2 &= \sum_i^m \sum_j^n |\tilde{y}_{i,j} - y'_{i,j}|^2 + \\ &+ \sum_i^m \sum_j^n |y'_{i,j} - x_{i,j}|^2 + \\ &+ \sum_i^m \sum_j^n [(\tilde{y}_{i,j} - y'_{i,j})(y'_{i,j} - x_{i,j}) + \\ &+ (\tilde{y}_{i,j} - y'_{i,j})^*(y'_{i,j} - x_{i,j})]. \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее слагаемое выражения (8) при условии, что аддитивный шум имеет нулевое математическое ожидание, равно нулю, поэтому получим:

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y} - X\|_E^2 &\approx \sum_i^m \sum_j^n |\tilde{y}_{i,j} - y'_{i,j}|^2 + \\ &+ \sum_i^m \sum_j^n |y'_{i,j} - x_{i,j}|^2 \geq \\ &\geq \sum_i^m \sum_j^n |y'_{i,j} - x_{i,j}|^2 = \|Y' - X\|_E^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Приведенный алгоритм предварительной обработки может использоваться в сочетании с любыми методами оценки параметров резонансной модели, где в качестве исходных массивов выступают матрицы теплицевой или ганкелевой структуры.

2. Исследование метода предварительной обработки

Основной процедурой метода предварительной обработки (МПО) является алгоритм сингулярного разложения (АСР). Покажем его основные свойства, используя алгебраическую и геометрическую интерпретацию.

Напомним, что ранг матрицы $Y = X + N$ равен M в случае отсутствия шума ($N = 0$) и $\min(m, n)$ при его наличии. Применим АСР к матрице X [4]:

$$X = (U_{X1} U_{X2}) \begin{pmatrix} \Sigma_{X1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{X1}^T \\ V_{X2}^T \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где U_{X1}, U_{X2} — левые сингулярные подматрицы сигнала и шума соответственно; V_{X1}, V_{X2} — правые сингулярные подматрицы сигнала и шума соответственно; Σ_{X1} — M главных сингулярных чисел. Сформулируем ограничения, при которых теоретически возможно найти точное решение X по наблюдаемой матрице Y [4]:

1) матрица X должна быть ортогональна матрице N : $X^T N = 0$;

2) матрицы V_{X1}, V_{X2} при наличии шума должны быть ортогональны друг другу и $V_{X1}^T N^T N V_{X2} = 0$, что может быть достигнуто, например, при $N^T N = \sigma^2 I$, где σ^2 — дисперсия шума, I — единичная матрица;

3) наименьшее СЧ Σ_{X1} должно быть больше наибольшего СЧ шума.

На практике точно выполняется лишь последнее условие, а 1) и 2) только приближенно, поэтому нахождение абсолютно точного X в общем случае — не решаемая задача. Для иллюстрации работы метода предварительной обработки допустим, что эти условия выполняются. Запишем результат действия АСР для матрицы Y (доказательство см. в [4]):

$$\begin{aligned} Y &= X + N = \\ &= U_{X1} \Sigma_{X1} V_{X1}^T + N V_{X1} V_{X1}^T + N V_{X2} V_{X2}^T = \\ &= \left((U_{X1} \Sigma_{X1} + N V_{X1}) (\Sigma_{X1}^2 + \sigma^2 I)^{-0.5} + \right. \\ &+ N V_{X2} \sigma^{-1} \cdot \left. \begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_{X1}^2 + \sigma^2 I} & 0 \\ 0 & \sigma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{X1}^T \\ V_{X2}^T \end{pmatrix} \right) = \\ &= (U_{Y1} \ U_{Y2}) \begin{pmatrix} \Sigma_{Y1}^2 & 0 \\ 0 & \Sigma_{Y2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{Y1}^T \\ V_{Y2}^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из разложения видно, что наименьшие СЧ сигнала $\sqrt{\Sigma_{X1}^2 + \sigma^2 I}$ всегда больше наибольших СЧ шума σI . Все СЧ шума равны друг другу и носят название "шумового порога". Используя (11), запишем точное теоретическое решение для СЧ сигнала:

$$\Sigma_{X1} = \sqrt{\Sigma_{Y1}^2 - \sigma^2 I}, \quad (12)$$

используя которое, можно определить матрицу X по матрице Y .

Дадим геометрическую интерпретацию АСР. Учтя, что U_{X1} ортогональна $N V_{X1}$ (т.к. $X^T N = 0$), определим "канонический" угол между подпространством сигнала и подпространством смеси сигнала с шумом:

$$\begin{aligned} C &= U_{X1}^T U_{Y1} = U_{X1}^T (U_{X1} \Sigma_{X1} + N V_{X1}) \cdot \\ &\cdot (\Sigma_{X1}^2 + \sigma^2 I)^{-0.5} = \Sigma_{X1} (\Sigma_{X1}^2 + \sigma^2 I)^{-0.5} = \\ &= (I + \sigma^2 \Sigma_{X1}^{-2})^{-0.5} = \Sigma_{X1} / \Sigma_{Y1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Косинусы таких углов — это диагональные элементы матрицы C . Из (12) видно, что наибольшему отношению сигнал/шум соответствует наименьший канонический угол и

$$\cos \alpha = \frac{\|X\|}{\|Y\|} = 1 / \sqrt{1 + \|N\|^2 / \|X\|^2}. \quad (14)$$

Представим на рис. 1 геометрическую интерпретацию АСР в двумерном случае. Усеченная M главными СЧ матрица \tilde{Y} геометрически представляет собой проекцию X на Y , поскольку аппроксимирует Y в смысле наименьших квадратов [4]. Из рис. 1 видно, что с уменьшением отношения сигнал/шум G разница как между векторами X и Y , так и между X и \tilde{Y} становится более ощутимой. Отметим, что подобная геометрическая интерпретация может быть распространена на любой N -мерный случай, при этом окружности и прямые превратятся в сферы и плоскости N -го порядка.

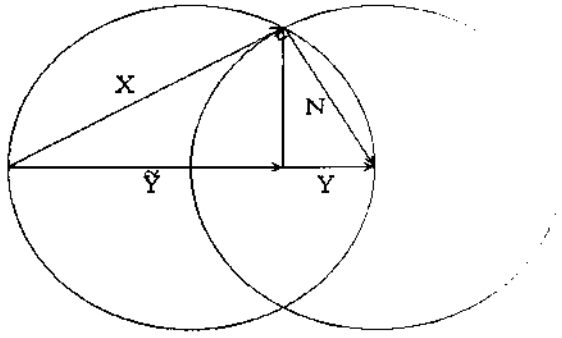


Рис. 1. Геометрическая интерпретация АСР.
 X — вектор сигнала; N — вектор шума.
 Y — вектор суммы сигнала с шумом.
 \tilde{Y} — вектор, полученный в результате АСР

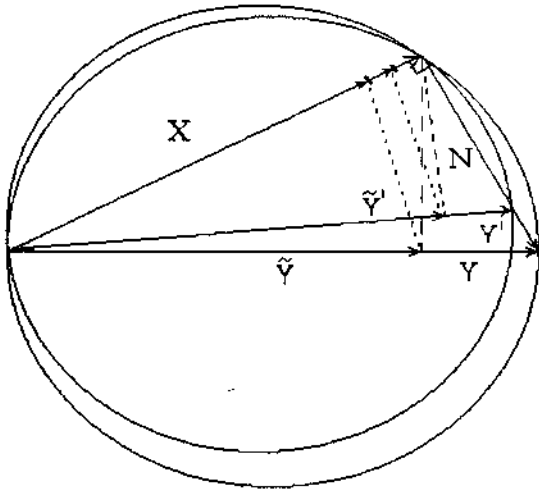


Рис. 2. Геометрическая интерпретация МПО на примере первой итерации.
 X — вектор сигнала, N — вектор шума,
 Y — вектор суммы сигнала с шумом,
 \tilde{Y} — вектор, полученный в результате АСР для Y , Y' — вектор после первой итерации МПО,
 \tilde{Y}' — вектор, полученный в результате АСР для Y'

Метод предварительной обработки в идеальном случае уменьшает влияние шума, заложенное в числа Σ_{Y1}^2 , не прямым вычитанием, как в (12), а итерационным уменьшением второго слагаемого (12). Проиллюстрируем это геометрически на примере первой итерации (рис. 2).

Усреднив диагональные элементы \tilde{Y} , мы получим вектор Y' , содержащий в себе другой шум, а значит имеющий некоторый угол с \tilde{Y} . Результаты нулевой и первой итерации, перенесенные на вектор X , наглядно иллюстрируют, что \tilde{Y}' более приближено к X , чем \tilde{Y} .

Отметим, что перспективой развития метода предварительной обработки можно считать его совместное применение с выражением (12), где в случае реальных данных вместо σ^2 возможно использовать среднеарифметическое всех незначимых СЧ.

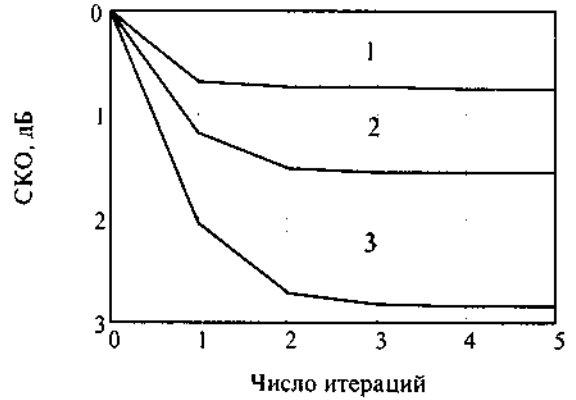


Рис. 3. Зависимость относительного среднеквадратического отклонения обработанных данных от числа итераций. "1" — $G = 10$ дБ; "2" — $G = 30$ дБ; "3" — $G = 50$ дБ

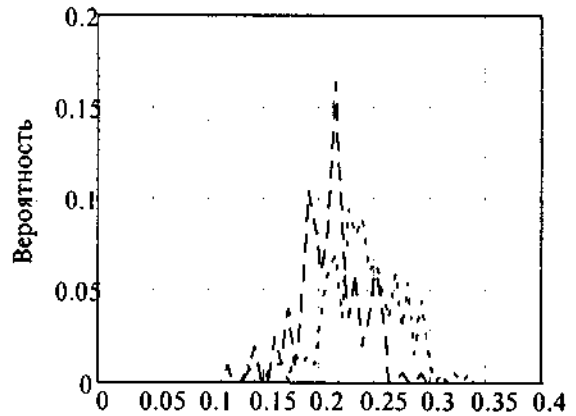


Рис. 4. Гистограмма $\Delta\sigma_w$ для 200 независимых испытаний при $G = 10$ дБ ($\sigma_w = 0,47$ мВ).
 "1" — результат первой итерации;
 "2" — результат пятой итерации

3. Экспериментальные исследования с использованием метода предварительной обработки

Проведем статистическое исследование МПО на примере модели сигнала, состоящего из суммы трех затухающих косинусоид с параметрами, указанными в табл. 1

Таблица 1

Параметр t-ой косинусоиды	t = 1	t = 2	t = 3
Амплитуда, мкВ	200	400	900
Нормированная частота	0,012	0,05	0,2
Нормированный коэффициент затухания	-0,019	-0,07	-0,251

Начальные фазы косинусоид $\theta_{c1}, \theta_{c2}, \theta_{c3}$ — произвольные. Оценим величину $\|X - Y\|_E$ для

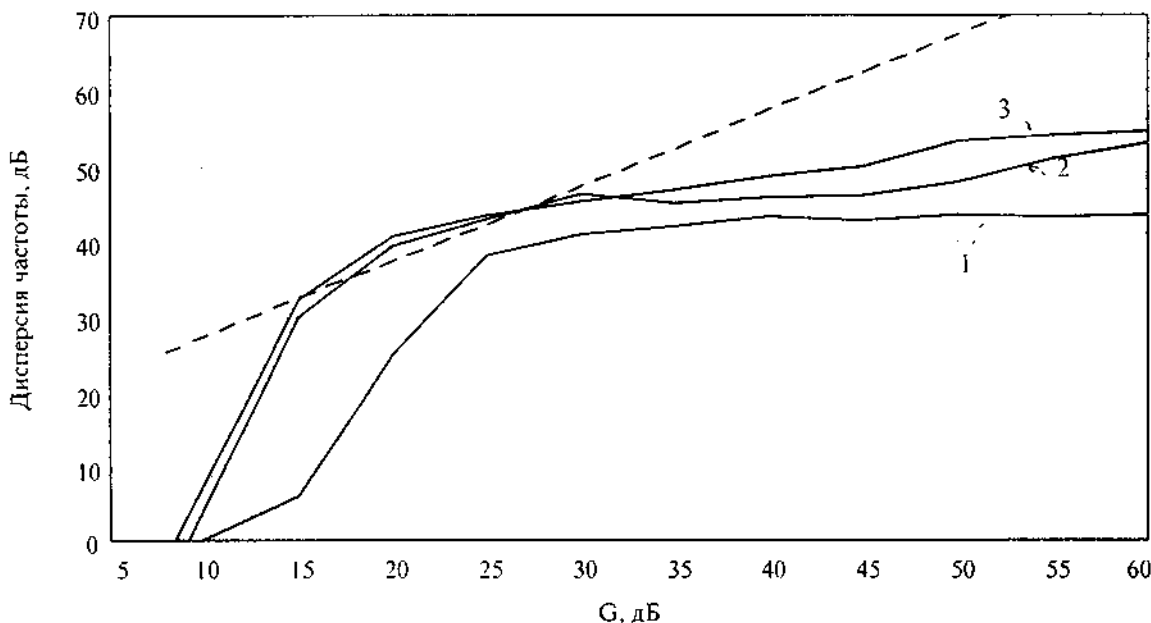


Рис. 5. Зависимость дисперсии частоты низкочастотного полюса от G , определенная с помощью различных методов после предварительной обработки данных:
 "1" – метод расщепления функции; "2" – метод ЛП вперед; "3" – метод ЛП назад;
 "----" – граница Рао-Крамера

200 независимых испытаний, при которых аддитивный шум каждый раз регенерируется. Матрица Y^j — результат МПО на j -ой итерации, где j принимает значения от 0 до 5. Усреднив результаты всех опытов и нормировав полученные величины к СКО шума,

$$\sigma_{\varepsilon} = \|X - Y^0\|_{\varepsilon} / \sqrt{mn} = \|N\|_{\varepsilon} / \sqrt{mn}$$

получим зависимости, представленные на рис. 3. Отношение сигнал/шум при этом определяется как

$$G = 20 \lg \frac{A}{\sigma}, \quad (15)$$

где A — максимальное значение амплитуды сигнала, σ — СКО аддитивного шума.

Анализируя представленные на рис. 3 результаты можно сделать вывод, что применение МПО эффективно при низком G , поскольку результат каждой последующей итерации приближает матрицу Y^j к матрице X .

Покажем, что для любого $j = 1, \dots, 5$ матрица Y^j ближе к матрице X , нежели Y , при всех 200 реализациях шума. Для этого вычислим для каждого массива данных величину $\Delta\sigma_{\text{ш}} = \|X - Y^j\|_{\varepsilon} - \|X - Y\|_{\varepsilon} / \sqrt{mn}$. Всякий раз, когда $\Delta\sigma_{\text{ш}}$ положительна, Y^j дает лучшую оценку X , чем Y . Моделирование проводилось при $G = 10$ дБ.

Гистограммы $\Delta\sigma_{\text{ш}}$ для $j = 1$ и $j = 5$ приведены на рис. 4. Масштаб по оси абсцисс нормирован величиной $1/\sqrt{mn}$, при этом $\sigma_{\text{ш}} = 4.74 \cdot 10^{-4}$ В.

Из рис. 4 видно, что с помощью пяти итераций МПО в среднем удалось понизить $\sigma_{\text{ш}}$ на 0,23 мВ (в $0,47/(0,47 - 0,23) \approx 2$ раза или на 3 дБ), где эффект первой обработки составляет $0,47/(0,47 - 0,18) \approx 1,6$ раза или примерно 2 дБ. Эти результаты также видны непосредственно из рис. 3.

Рис. 4 также иллюстрирует, что величина $\Delta\sigma_{\text{ш}}$ при анализируемых G положительна для всех 200 независимых испытаний, из чего следует, что Y^j действительно ближе к истинному X . При этом степень приближения тем выше, чем выше j .

Оценим дисперсию полюсов модели сигнала в зависимости от G при совместном использовании МПО и различных методов оценки параметров резонансной модели. Величину дисперсии частоты будем оценивать по результатам 200 независимых опытов, при которых аддитивный шум каждый раз регенерируется. Результаты оценки дисперсии частоты с использованием методов линейного предсказания (ЛП) вперед и назад и метода расщепления функции [1,2] представлены на рис. 5.

Приведенные зависимости иллюстрируют, что использование МПО совместно с методами ЛП дают высокую точность оценки в области больших шумов при $G < 30$ дБ. При этом в области низких шумов использование МПО теряет смысл, поскольку точность определения параметров уже не повышается с увеличением G .

Дисперсия частоты, дБ

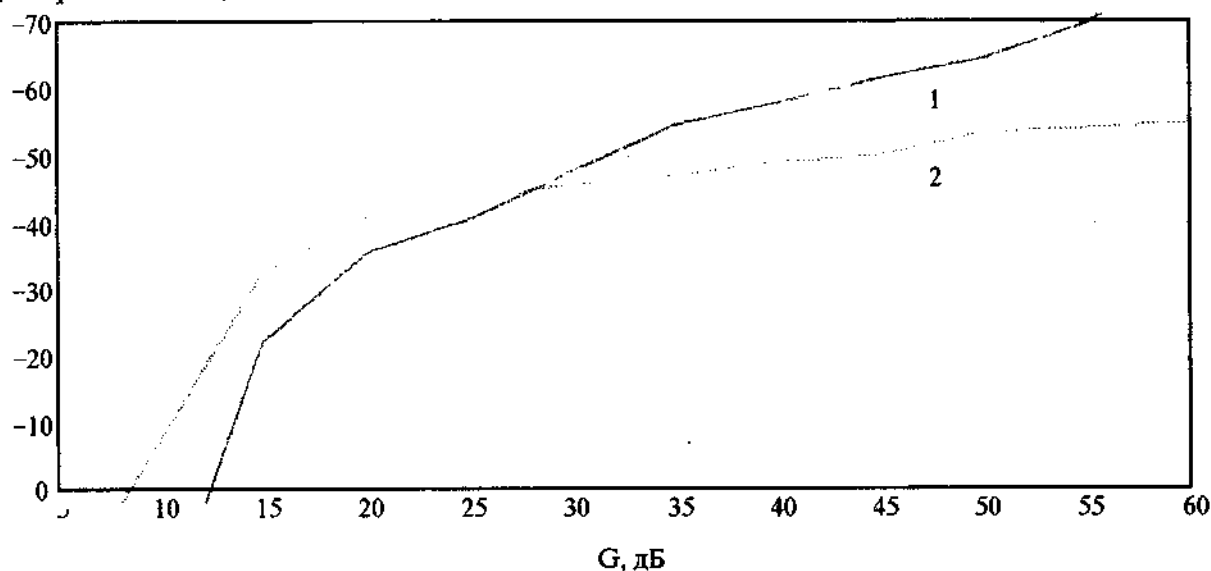


Рис. 6. Зависимость дисперсии частоты низкочастотного полюса от G .

"1" — метод ЛП назад после предварительной обработки данных, "2" — метод расщепления функции; "—" — граница Рао-Крамера.

Перечисленные доводы наглядно иллюстрируются рис. 6, где сравнивается дисперсия частоты низкочастотного полюса, найденная с использованием метода расщепления функции (известного, как одного из наиболее точных методов при отсутствии предварительной обработки) и метода ЛП назад, совместно с МПО. Здесь хорошо заметен выигрыш от использования МПО при $G < 25$ дБ.

Отметим, что при использовании МПО совместно с методами ЛП повышается точность оценки параметров всех полюсов модели. Результаты моделирования для дисперсии коэффициента затухания имеют ту же тенденцию и поэтому не приводятся. Упомянем лишь, что как в случае применения МПО, так и без него точность определения коэффициентов затухания всегда выше, что особенно сказывается при низких G .

Выводы

В хорошо известных цифровых методах обработки часто используется пониженный ранг аппроксимации входной последовательности без учета теплоцевой или ганкелевой структуры матрицы данных. Ввиду этого предложено учитывать свойства этих структур при понижении ранга матрицы данных с использованием сингулярного разложения.

Алгоритм МПО уменьшает влияние шума, заложенное в главные сингулярные числа путем итерационных преобразований. МПО может использоваться в сочетании с любыми методами оценки параметров резонансной модели, где в качестве исходных массивов выступают матрицы теплоцевой или ганкелевой структуры.

Применение МПО особенно эффективно при низком отношении сигнал/шум, когда результат каждой последующей итерации j приближает найденную матрицу Y^j к матрице X . Использование МПО совместно с методами линейного предсказания дает высокую точность оценки параметров резонансной модели в области больших шумов ($G < 30$ дБ). Шумовой порог работоспособности методов линейного предсказания, при использовании МПО снижается в среднем на 5 дБ.

Литература

1. С.Л. Марпл-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М.: Мир, 1990.
2. Y. Hua and T. K. Sarkar, Generalized Pencil-of-Function Method for Extracting Poles of an EM System from its Transient Response, //IEEE Trans. on Antennas and Propagation, February 1989, Vol. AP-37, No. 2, pp. 229-233.
3. K. Konstantinides, Kung Yao. Statistical Analysis of Effective Singular Values in Matrix Rank Determination. // IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing. May 1988. Vol.36, № 5.
4. Bart De Moor, The Singular Value Decomposition and Long and Short Spaces of Noisy Matrices. // IEEE Transaction on Signal Processing. Sept. 1993. Vol.41, № 9.