

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(технический университет)

Ю.В. КУЗНЕЦОВ Ю.В. ТРОНИН

ЛИНЕЙНЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ
(УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ)
Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
4 октября 1993 г.

Москва
Издательство МАИ
1994

Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Линейные радиоэлектронные цепи и сигналы (упражнения и задачи): Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1994. – 48 с.: ил.

Рассмотрены некоторые практические вопросы анализа простейших линейных радиоэлектронных цепей и математического описания сигналов, а также символический метод анализа радиоэлектронных схем. По каждому из разделов приведены задачи, самостоятельное решение которых предусмотрено учебным планом для студентов факультета радиоэлектроники ЛА, изучающих дисциплины "Основы радиоэлектроники" и "Радиотехнические цепи и сигналы".

Рецензенты: В.Ф. Дижонов, Е.Д. Проценко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие является, по существу, задачником, которым удобно пользоваться вместе с ранее изданными пособиями по основам анализа линейных радиоэлектронных цепей [1, 2]. В нем приведен порядок решения задач по некоторым разделам дисциплин "Основы радиоэлектроники" и "Радиотехнические цепи и сигналы", а также даны варианты домашних заданий, которые можно использовать при самостоятельном изучении этих курсов.

В первом разделе рассмотрены основные понятия теории радиоэлектронных цепей: взаимосвязь тока и напряжения на элементах цепей (емкости, индуктивности, сопротивлении), мгновенная, средняя и колебательная мощности и т.д.

Во втором разделе приведены примеры анализа разветвленных радиоэлектронных цепей, содержащих сопротивления и источники тока и напряжения, в том числе и управляемые напряжением или током в других ветвях цепи.

В третьем разделе рассмотрены методы описания некоторых сигналов (тока и напряжения), используемых в радиоэлектронных цепях, на основе прямого и обратного преобразования Лапласа.

В последнем разделе приводятся упражнения по использованию символического метода анализа цепей при гармонических воздействиях в установившемся режиме, в том числе и резонансных цепей с неполным включением контура.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

В теоретической радиотехнике приходится иметь дело с моделями цепей и сигналов. Модель цепи представляет собой совокупность взаимосвязанных элементов, каждый из которых описывает определенные свойства компонента радиоэлектронной цепи. Элементы можно условно разделить на активные и пассивные. К пассивным элементам относятся сопротивление, емкость, индуктивность, взаимная индуктивность. Активные элементы описываются независимыми и управляемыми источниками тока и напряжения.

При описании радиотехнических систем пользуются моделями радиоэлектронных устройств, идеализируя операции, которые реальное устройство проводит над входным сигналом. Примерами могут служить интегратор, идеальный усилитель, сумматор, дифференциатор, умножитель, идеальные фильтры и т.п. Описание таких моделей заключается в установлении однозначной связи между входным и выходным сигналами.

У п р а ж н е н и е 1.1. По заданной форме напряжения $u(t)$ на емкости C (рис. 1.1, а) определить ток $i(t)$ через емкость, а также мощность $p(t)$ и энергию $w(t)$, накапливаемую в емкости.

Пусть $u(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau})$ для $t \geq 0$. Для нахождения тока через емкость воспользуемся соотношением

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \frac{CU_0}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

График функции тока изображен на рис. 1.1, б. Видно, что сила тока пропорциональна скорости изменения напряжения, максимальный ток $I_0 = CU_0/\tau$ наблюдается при $t = 0$, а через интервал времени, равный приблизительно 3τ , когда напряжение практически достигнет величины U_0 и не меняется, ток близок к нулю.

Мгновенная мощность определяется произведением тока и напряжения:

$$p(t) = u(t) i(t) = U_0 I_0 (e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau}).$$

Эта функция приведена на рис. 1.1, в.

Следует отметить, что ни максимальный ток, ни максимальное напряжение на емкости не обеспечивают максимальной мощности. Поскольку мощность все время положительна, то энергия в емкости накапливается, что соответствует зарядке емкости.

Энергия в емкости определяется напряжением на ней:

$$w(t) = C \frac{u^2(t)}{2} = \frac{CU_0^2}{2} (1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}).$$

График энергии показан на рис. 1.1, г, из которого видно, что энергия монотонно увеличивается, причем максимальная скорость увеличения энергии соответствует максимальной мощности. Еще одна важная особенность состоит в том, что энергия емкости не может быть отрицательной, и поэтому емкость относится к пассивным элементам, хотя и может накапливать энергию.

У п р а ж н е н и е 1.2. Источник тока $i_1(t)$, график которого приведен на рис. 1.2, б,

возбуждает первичную катушку L_1 двух индуктивно связанных катушек (рис. 1.2, а). Параметры элементов цепи следующие: $L_1 = 1$ мГн, $L_2 = 10$ мГн,

$M = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{10}$ мГн. Определить напряжения $u_1(t)$, $u_2(t)$ и максимальную энергию W_1 , запасаемую первичной катушкой.

Решение задачи основывается на соотношениях, определяющих связь тока и напряжения в индуктивности: $u_1(t) = L_1 di_1(t)/dt$. Поскольку цепь вторичной катушки разорвана ($i_2(t) = 0$), она не оказывает влияния на напряжение первичной катушки. Форма напряжения $u_1(t)$

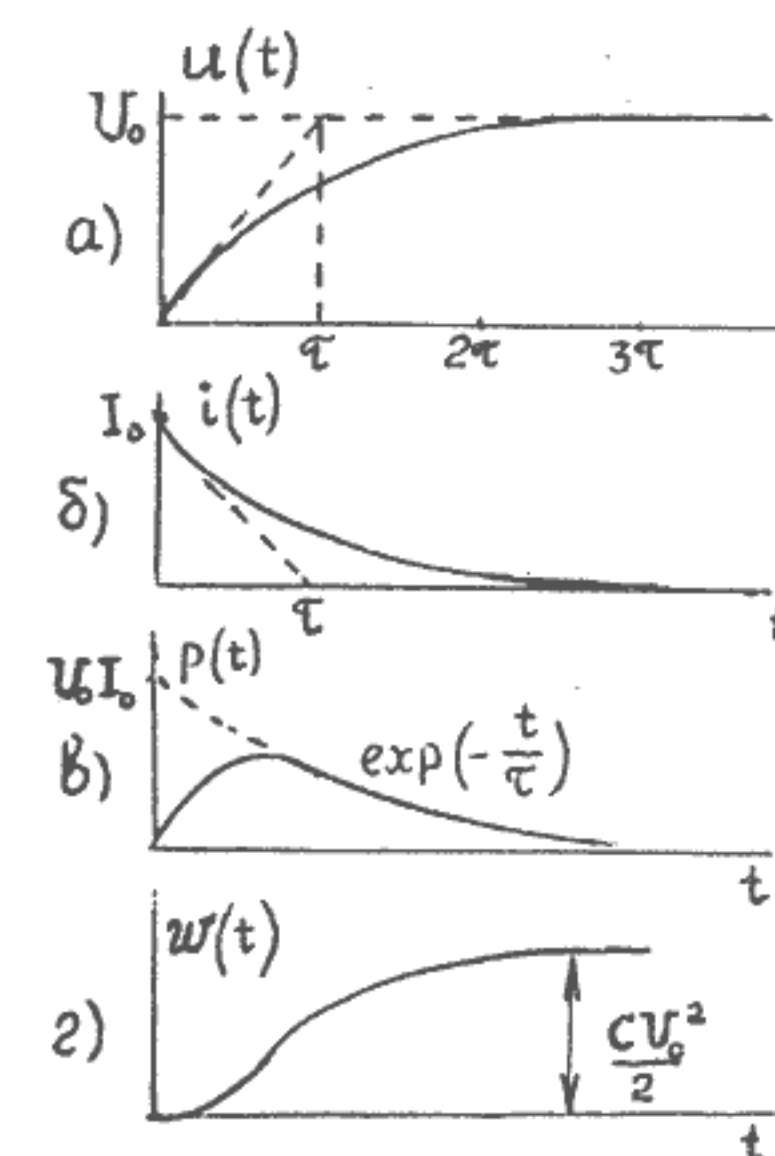


Рис. 1.1

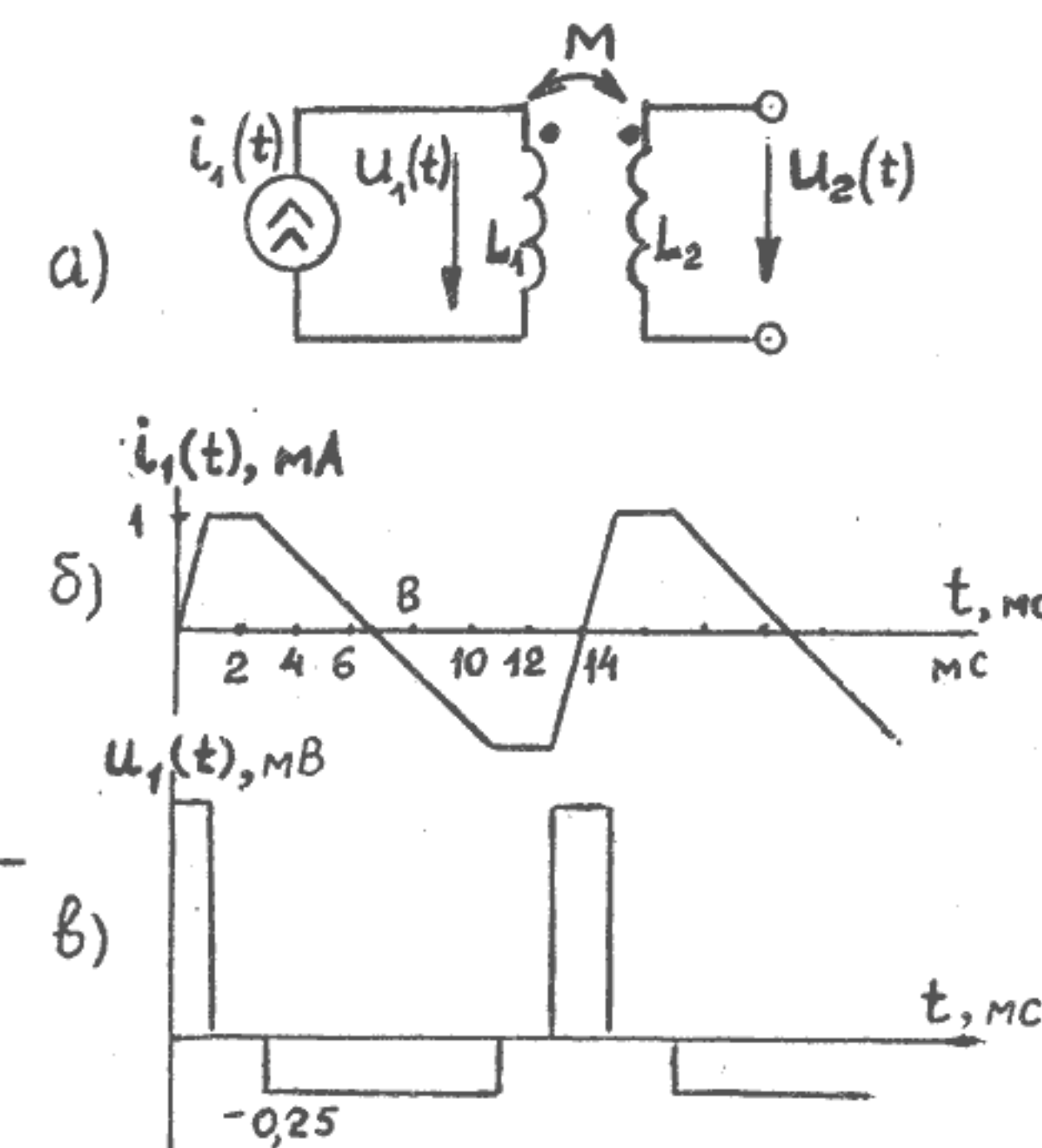


Рис. 1.2

показана на рис. I.2, в. Из рисунка видно, что напряжение на индуктивности пропорционально скорости изменения тока.

Напряжение на вторичной катушке определяется взаимной индуктивностью M и током через первичную катушку:

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} = \frac{M}{L_1} u_1(t) = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} u_1(t).$$

В нашем случае напряжение $u_2(t)$ совпадает по форме с напряжением $u_1(t)$ и в $\sqrt{10}$ раз больше его.

Энергия в индуктивности однозначно определяется током через нее: $w(t) = L i_f^2(t)/2$, а значит в индуктивности максимальная энергия запасается при протекании через нее максимального тока. В данной задаче $W_f = 0,5 \cdot 10^{-9}$ Дж, причем эта величина не зависит от направления тока.

У п р а ж н е н и е I.3. В схеме, изображенной на рис. I.3, действуют два источника. Один из них — независимый источник тока I , другой — источник напряжения, управляемый током I_2^x . Найти напряжение между точками a и b .

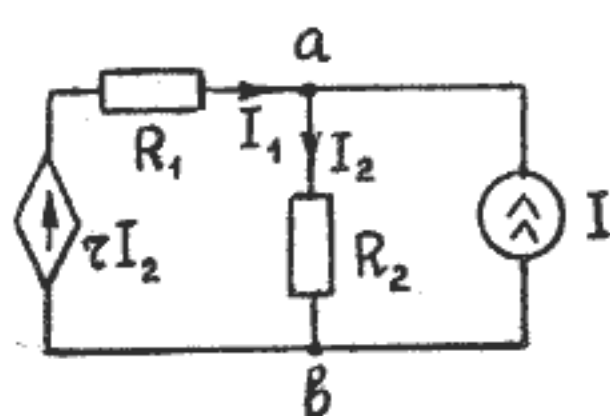


Рис. I.3

Согласно закону Ома $U_{ab} = I_2 R_2$. В свою очередь, ток I_2 складывается из двух токов: $I_2 = I + I_1$. Ток I_1 выражается через разность потенциалов на сопротивлении R_1 : $I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1}$.

Искомое напряжение U_{ab} определяется алгебраическим преобразованием трех уравнений:

$$U_{ab} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 - r}.$$

Обратите внимание на то, что в частном случае, когда $r = 0$, схема сводится к двум параллельно включенным сопротивлениям R_1 и R_2 . Если же $r = R_1 + R_2$, то согласно полученному выражению $U_{ab} \rightarrow \infty$. Физически это означает, что источник тока I включен на нагрузку с бесконечно большим сопротивлением, т.е. управляемый источник полностью скомпенсировал потери энергии в сопротивлениях R_1 и R_2 . Напомним, что управляемый источник является активным элементом, потребляющим энергию не от данной схемы, а извне, поэтому и возможны столь неожиданные результаты.

^x Напомним, что параметр r — не сопротивление, а коэффициент пропорциональности управляемого источника, имеющий размерность сопротивления.

У п р а ж н е н и е I.4. Определить взаимосвязь между током $i_1(t)$ и напряжением $u_1(t)$ в цепи, содержащей управляемые источники напряжения $k u_2(t)$ и тока $\beta i_1(t)$ (рис. I.4).

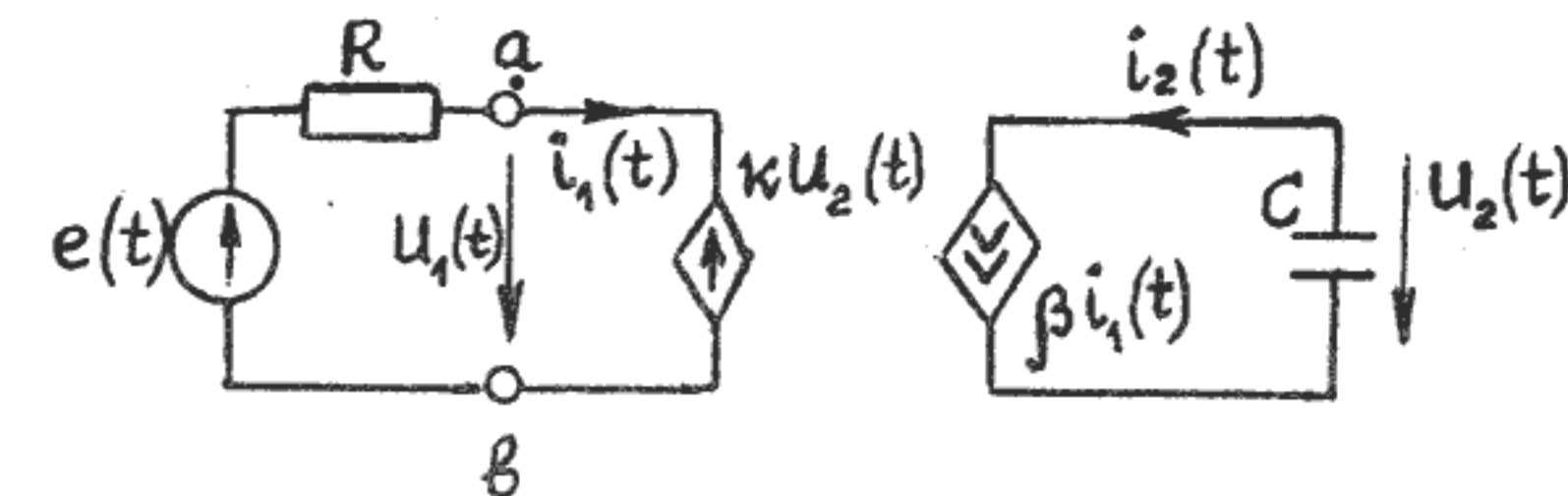


Рис. I.4

Запишем уравнение, связывающее ток и напряжение на емкости C :

$$i_2(t) = -C \frac{du_2(t)}{dt} = \beta i_1(t).$$

Знак "—" объясняется тем, что направления, выбранные для тока $i_2(t)$ и напряжения $u_2(t)$, не согласованы. Учитывая, что $u_1(t) = k u_2(t)$, получим

$$i_1(t) = -\frac{C}{\beta k} \frac{du_1(t)}{dt} = -C_1 \frac{du_1(t)}{dt}.$$

Таким образом, часть схемы справа от сечения $a-b$ эквивалентна некоторой "отрицательной емкости" C_1 , величина которой зависит от реальной емкости C и от коэффициентов передачи k и β .

С помощью управляемых источников можно синтезировать элементы с нужными свойствами, т.е. требуемыми соотношениями между током и напряжением.

У п р а ж н е н и е I.5. В схеме (рис. I.5) источник создает гармоническое напряжение

$$u(t) = U_m \cos \omega t.$$

Определить токи $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i(t)$ и мощность источника $p(t)$.

Имеем

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t;$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t$$

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) = U_m \left(\frac{1}{R} \cos \omega t + \frac{1}{\omega L} \sin \omega t \right).$$

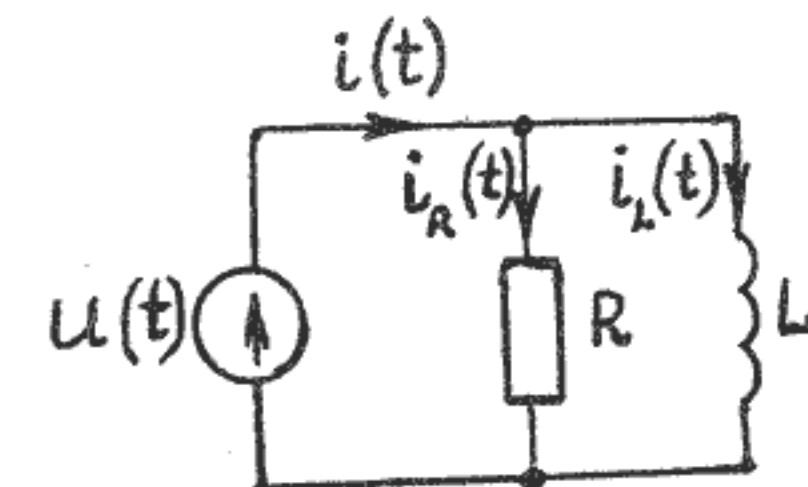


Рис. I.5

Применяя тригонометрические преобразования^х, получаем

$$i(t) = \frac{U_m}{Z} \cos(\omega t - \varphi);$$

$$Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{R}{\omega L}.$$

Графики напряжения и токов приведены на рис. I.6.

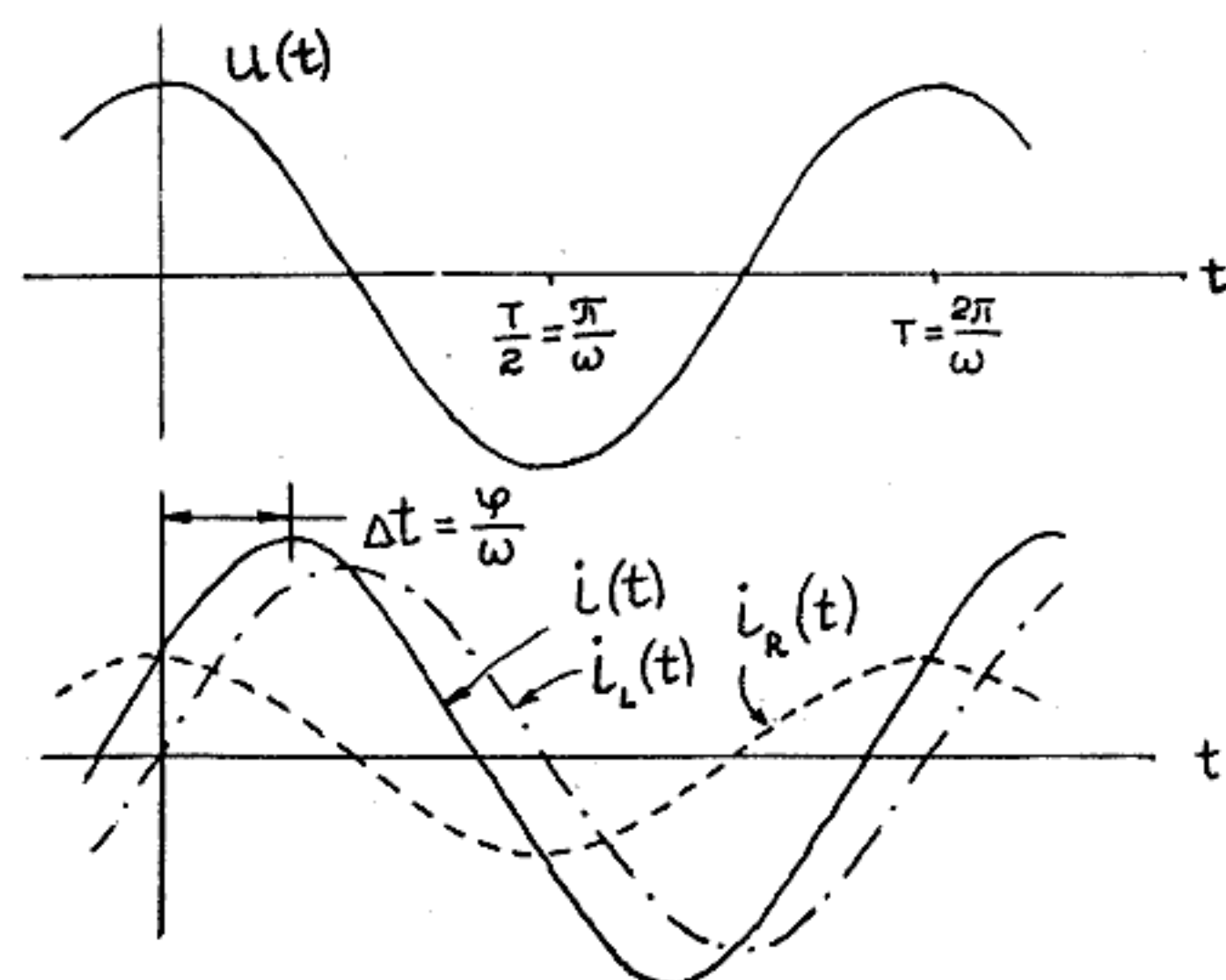


Рис. I.6

Отметим общее свойство всех линейных цепей: при гармоническом воздействии все токи и напряжения имеют ту же форму синусоидального сигнала той же частоты, отличие только в амплитудах и начальных фазах.

Определим мощность, развиваемую источником:

$$p(t) = u(t) i(t) = \frac{U_m^2}{Z} \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U_m^2}{2Z} \cos \varphi + \frac{U_m^2}{2Z} \cos(2\omega t - \varphi) = P_R + P_Q \cos(2\omega t - \varphi).$$

Заменив амплитудное значение U_m на действующее $U_A = U_m / \sqrt{2}$, а также отметив, что $Z / \cos \varphi = R$, получим

$$P_R = \frac{U_A^2}{R}, \quad P_Q = \frac{U_A^2}{Z} \gg P_R.$$

Итак, мощность источника состоит из двух слагаемых: средней (постоянной) мощности P_R , зависящей только от U_A и сопротивления R , и переменной (колебательной) мощности с удвоенной частотой 2ω и амплитудой P_Q , зависящей и от R и от L .

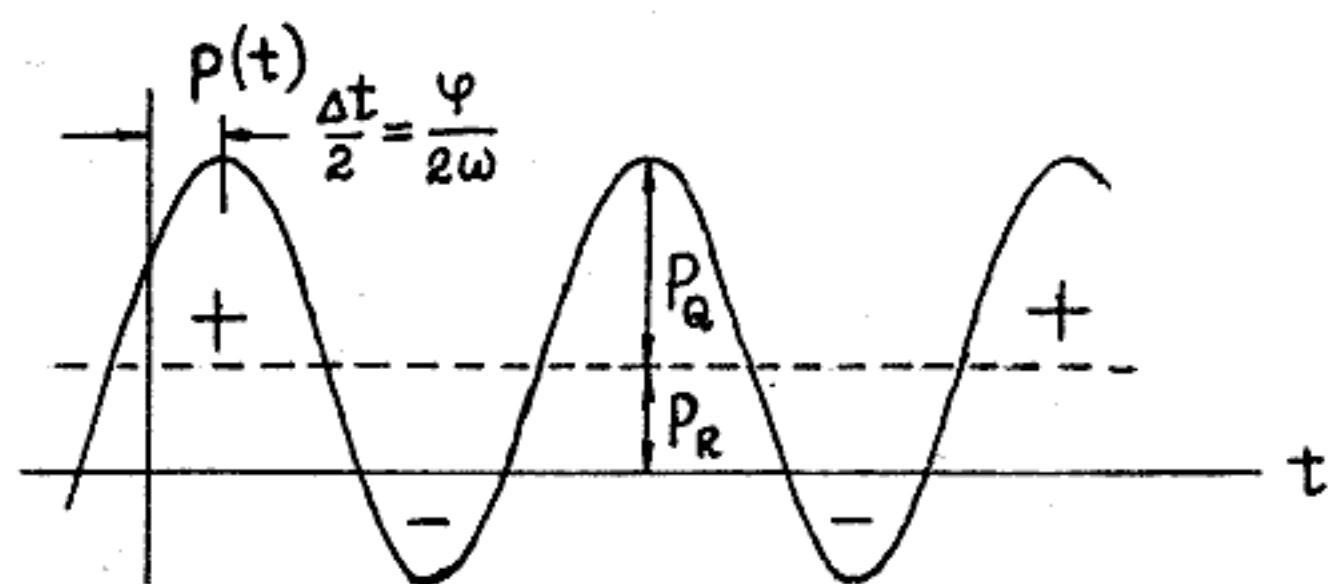


Рис. I.7

^х $a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = A \cos(\alpha - \varphi).$

Здесь введены подстановки:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi, \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}.$$

При чисто активной нагрузке ($L \rightarrow \infty$) амплитуда переменной составляющей $P_Q = P_R$, и мгновенная мощность неотрицательна: $p(t) \geq 0$.

В предельном случае чисто реактивной нагрузки ($R \rightarrow \infty$) средняя мощность равна нулю $P_R = 0$, а переменная составляющая $P_Q = U_A^2 / \omega L$.

В общем случае $P_Q > P_R$, и $p(t)$ — знакопеременная (рис. I.7). Это означает, что в течение части периода источник отдает энергию в нагрузку, а в течение другой (меньшей) части энергия из нагрузки поступает в источник.

У п р а ж н е н и е I.6. Для идеального интегратора (рис. I.8) определить форму выходного сигнала $y(t)$ при заданном входном воздействии $x(t)$ (рис. I.9).

Сигнал на выходе интегратора определяется выражением

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + y(0).$$

Запишем аналитическое соотношение для $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ A & \text{при } 2nT \leq t \leq (2n+1)T; \\ -A & \text{при } (2n+1)T \leq t \leq 2(n+1)T, \end{cases}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Теперь подставим его в выражение для $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} y(0) + At & \text{при } 0 < t < T; \\ y(0) + 2AT - At & \text{при } T < t < 2T; \\ y(0) - 2AT + At & \text{при } 2T < t < 3T \end{cases}$$

и т.д.

График функции выходного сигнала показан на рис. I.9. Обратите внимание на то, что выходной сигнал в каждый момент времени равен площади функции входного сигнала до этого момента времени плюс начальное значение $y(0)$. Это общее свойство интегратора не зависит от формы входного сигнала.

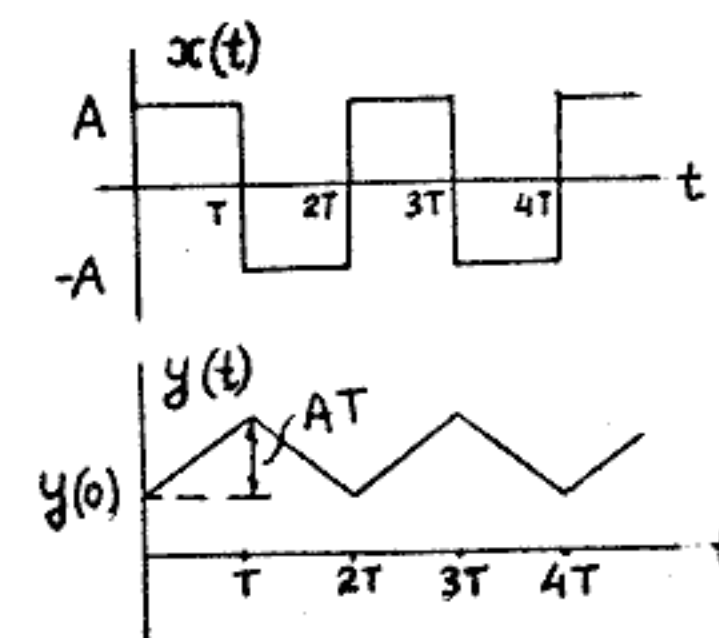


Рис. I:9

ЗАДАЧИ

I.1. Ток через индуктивность изменяется по закону

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ I_m \sin^2 \omega t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Найти напряжение на индуктивности, мгновенную мощность и энергию. Построить графики полученных зависимостей.

I.2. Ток через индуктивность изменяется по закону

$$i(t) = \begin{cases} -2I_0(t-2kt_0)/t_0 + I_0; & 2kt_0 < t \leq (2k+1)t_0; \\ 2I_0[t-(2k+1)t_0]/t_0 - I_0; & (2k+1)t_0 \leq t \leq 2(k+1)t_0, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. Найти напряжение на индуктивности, мгновенную мощность и энергию. Построить графики полученных зависимостей.

I.3. Напряжение на индуктивности имеет вид, показанный на рис. I.10.

Начальный ток через индуктивность $i(0) = I_0$. Записать математические выражения напряжения, тока, мгновенной мощности и энергии на индуктивности. Построить соответствующие графики.

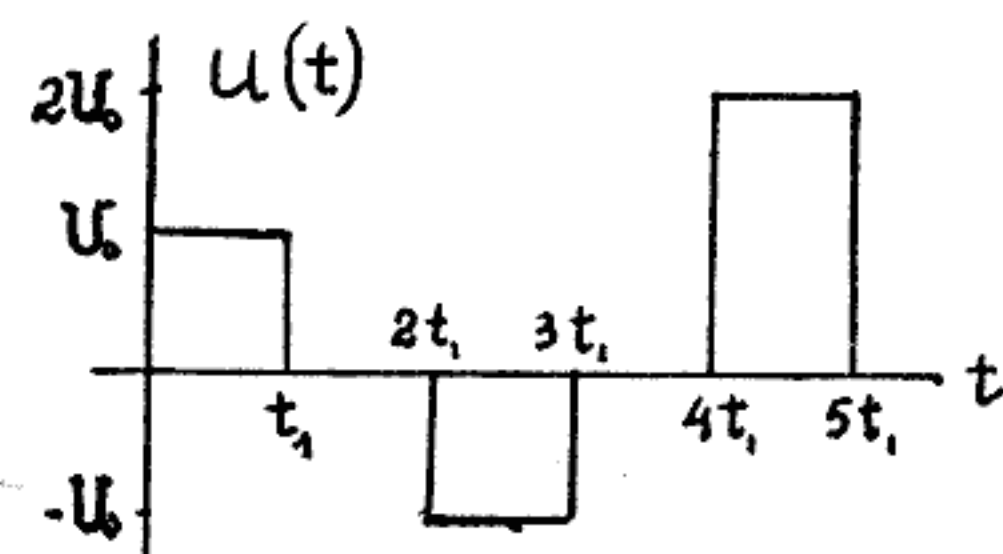


Рис. I.10

I.4. Напряжение на емкости имеет вид (рис. I.11)

$$u(t) = \begin{cases} U_m |\sin \omega t| & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{4\pi}{\omega} \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Найти и построить графики тока, мгновенной мощности и энергии емкости.

I.5. Напряжение на емкости имеет вид, показанный на рис. I.12. Записать математические выражения для напряжения, тока мгновенной мощности и энергии емкости. Построить соответствующие графики.

I.6. Ток через емкость имеет трапециевидальную форму (рис. I.13). Начальное напряжение на емкости $u(0) = U_0$. Записать математические выражения и построить графики напряжения, тока, мгновенной мощности и энергии емкости.

I.7. Считая, что положительные направления тока и напряжения выбраны согласно, определить, при каких условиях ток через емкость имеет положительное значение, если напряжение на ней отрицательно. Вывод пояснить соответствующими примерами и графиками.

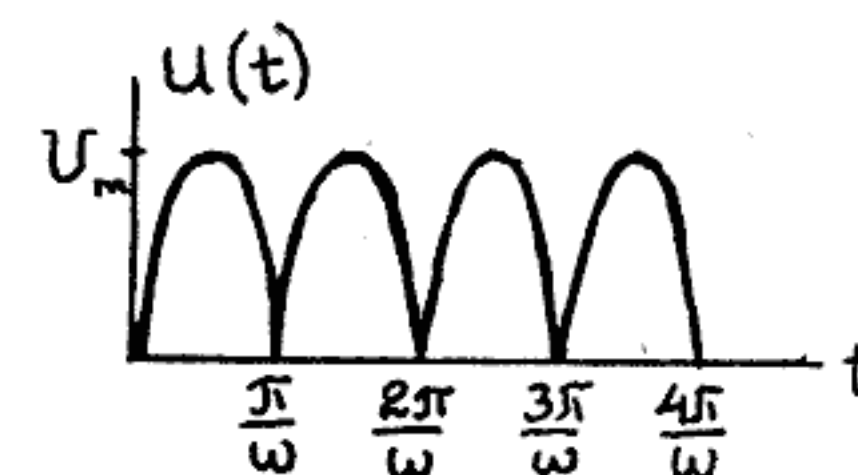


Рис. I.11

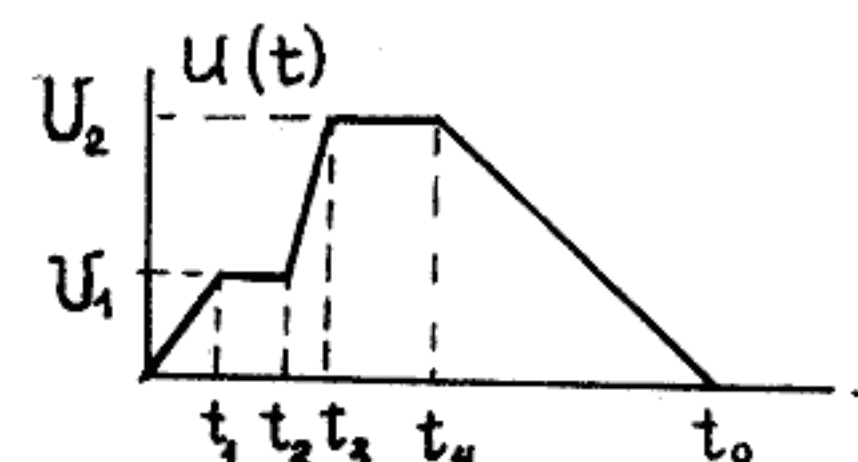


Рис. I.12

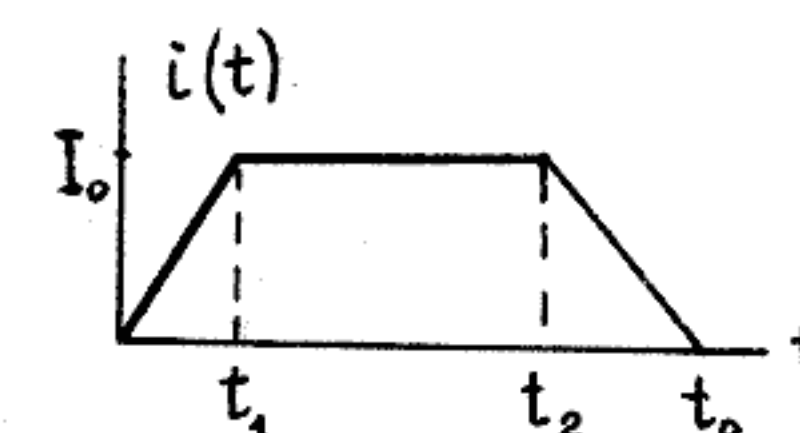


Рис. I.13

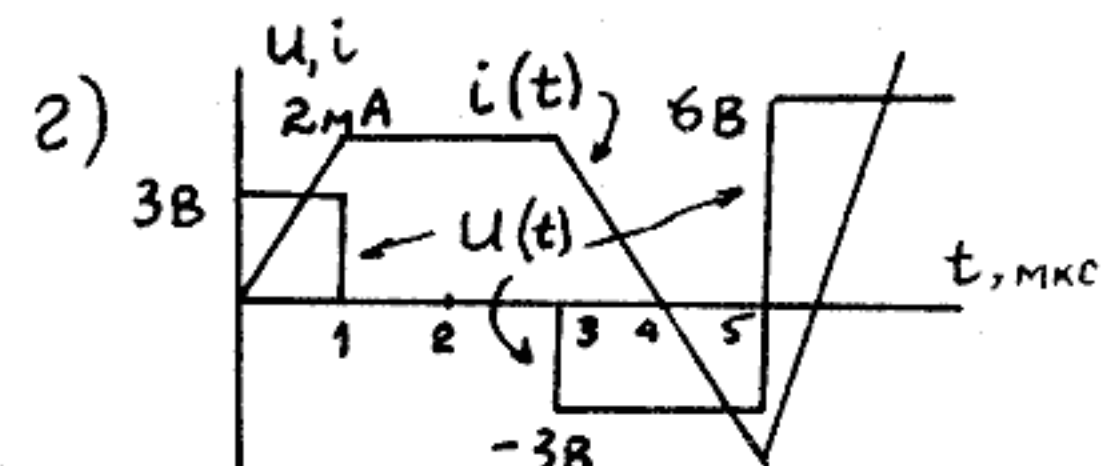
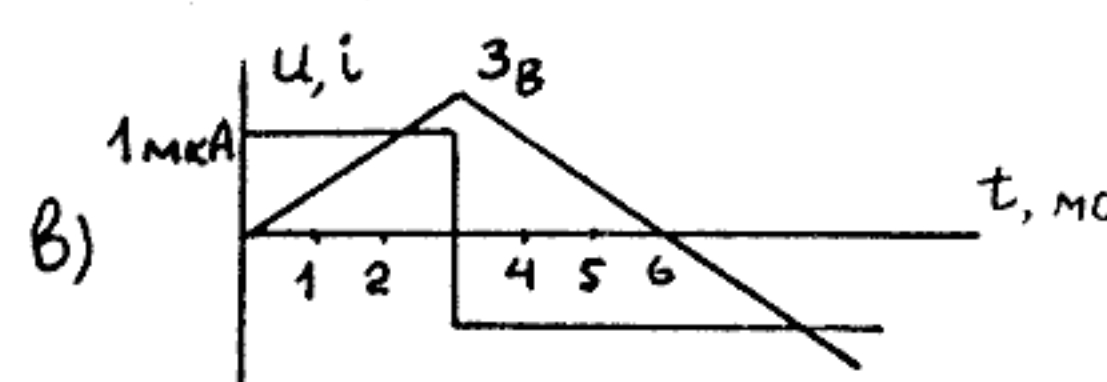
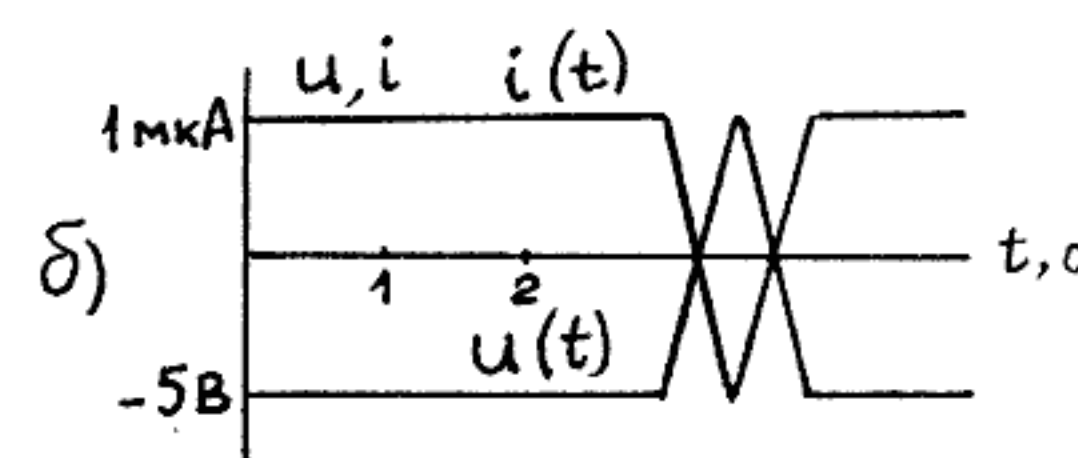
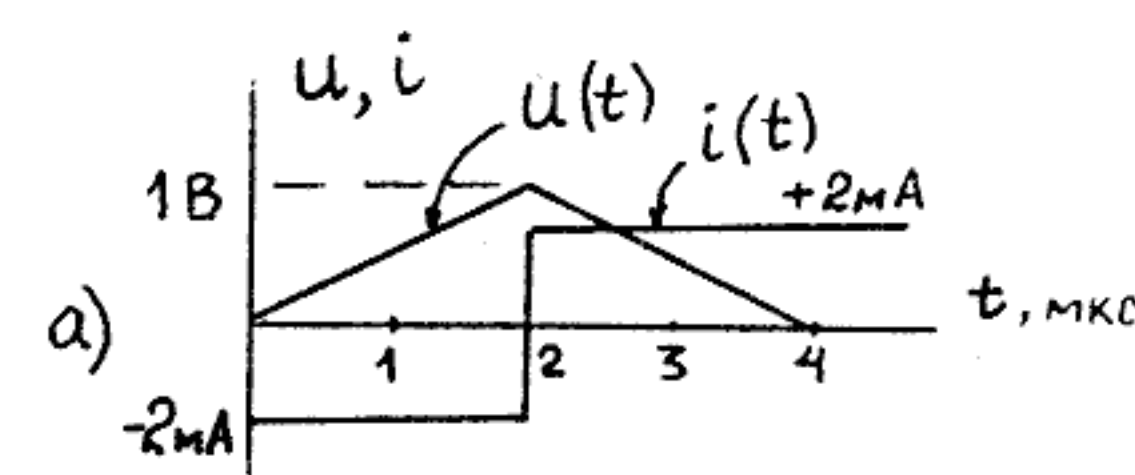


Рис. I.14

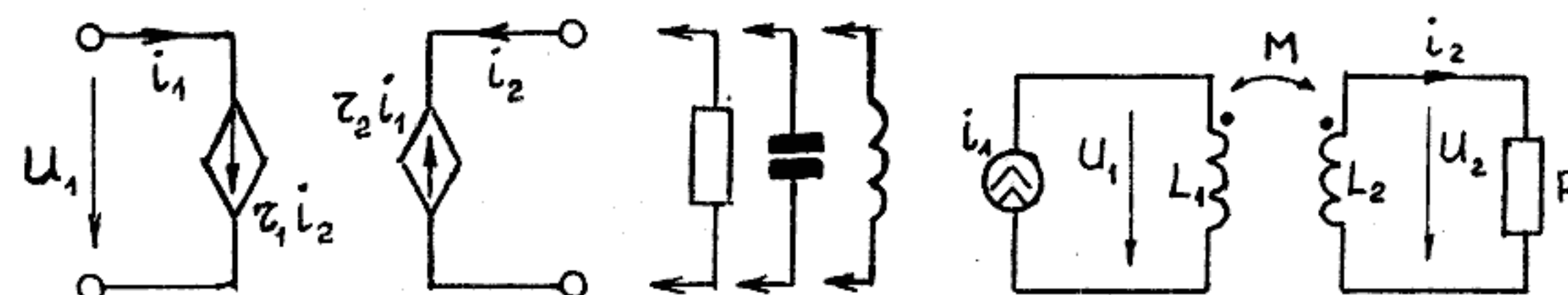


Рис. I.15

Рис. I.16

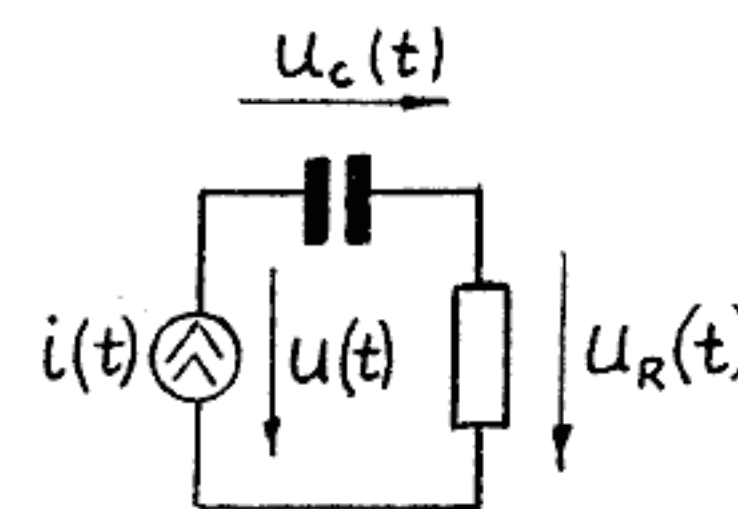


Рис. I.17

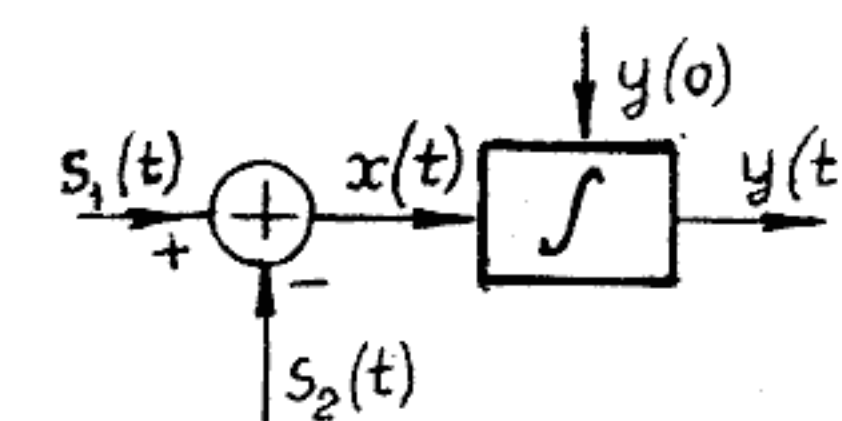


Рис. I.18

I.8. Определить, каким элементам электрической цепи и при каком выборе положительных направлений напряжений и токов соответствуют напряжения и токи, временные диаграммы которых изображены на рис. I.14, а, б, в, г. Определить их численные значения.

I.9. Найти связь между током $i_1(t)$ и напряжением $u_1(t)$ при подключении к выходу схемы (рис. I.15) либо сопротивления R , либо емкости C , либо индуктивности L , считая t_1 и t_2 известными. Каким элементам эквивалентна каждая из этих схем в смысле соотношения между входным током и напряжением?

I.10. В схеме, содержащей две индуктивно связанные катушки L_1 и L_2 , взаимная индуктивность $M = \sqrt{L_1 L_2}$ (рис. I.16); на входе действует источник синусоидального тока $i_1(t) = I_1 \cos \omega t$. Определите выражения для тока $i_2(t)$ и напряжения на источнике тока $u_1(t)$.

I.11. В последовательной RC -цепи (рис. I.17) действует источник тока синусоидальной формы $i(t) = I_m \cos \omega t$. Считая R и C заданными, определить и построить графики напряжения на источнике тока $u(t)$, а также мгновенной мощности $p(t)$, развиваемой источником тока. Найти среднюю и колебательную мощности источника тока.

I.12. На входы алгебраического сумматора (рис. I.18) начиная с момента $t = 0$ поступают гармонические колебания

$$s_1(t) = S_{m1} \cos(\omega t + \pi/4) \quad \text{и} \quad s_2(t) = 2 S_{m1} \cos(\omega t + \pi/2).$$

Найти и построить графики входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов интегратора, считая начальное значение $y(0)$ известным.

I.13. У каких элементов электрической цепи напряжение и ток на внешних зажимах могут описываться функциями:

- 1) $u(t) = V_m \cos(\omega t + \pi/3)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t + \pi/3)$;
- 2) $u(t) = V_m \cos(\omega t + \pi)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$;
- 3) $u(t) = V_m \sin \omega t$, $i(t) = I_m \sin \omega t$;
- 4) $u(t) = V_m \cos(\omega t + 3\pi/4)$, $i(t) = I_m \cos(\omega t + \pi/4)$.

Определить значения этих элементов, считая V_m , I_m и ω известными.

I.14. Для схемы (рис. I.19), содержащей два зависимых источника тока, определить соотношение между входным напряжением $u_1(t)$ и током $i_1(t)$ для каждой из трех нагрузок R , L или C , подключаемых к выходу цепи.

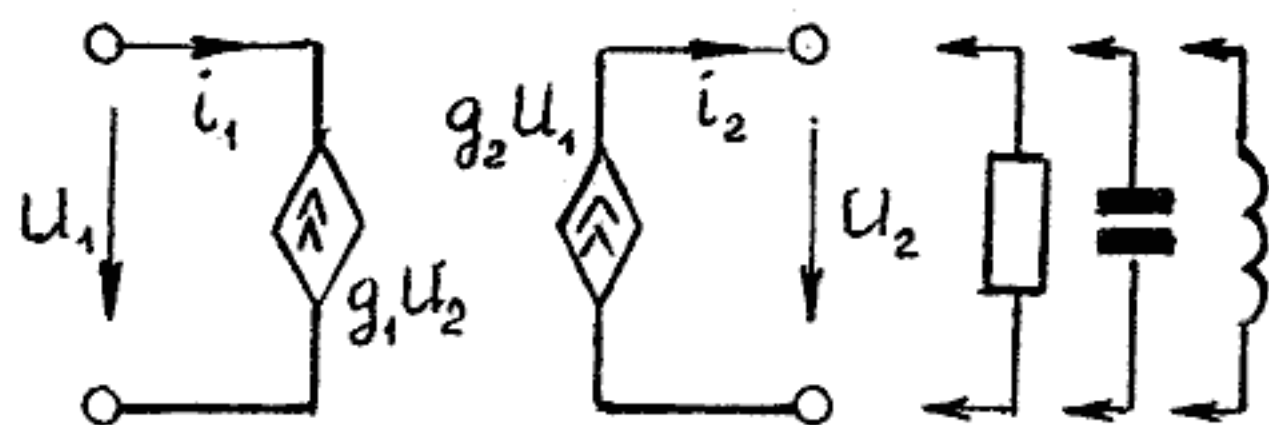


Рис. I.19

I.15. Напряжение на сопротивлении R изменяется по закону

$$u(t) = V_m \sin^3 \omega t.$$

Определить и построить графики тока через сопротивление и мгновенной мощности. Найти среднюю мощность в сопротивлении.

I.16. Ток через сопротивление R изменяется так, как показано на рис. I.20. Записать математические выражения тока, мгновенной мощности и напряжения на сопротивлении в пределах периода T и построить соответствующие графики. Определить среднюю мощность в пределах периода.

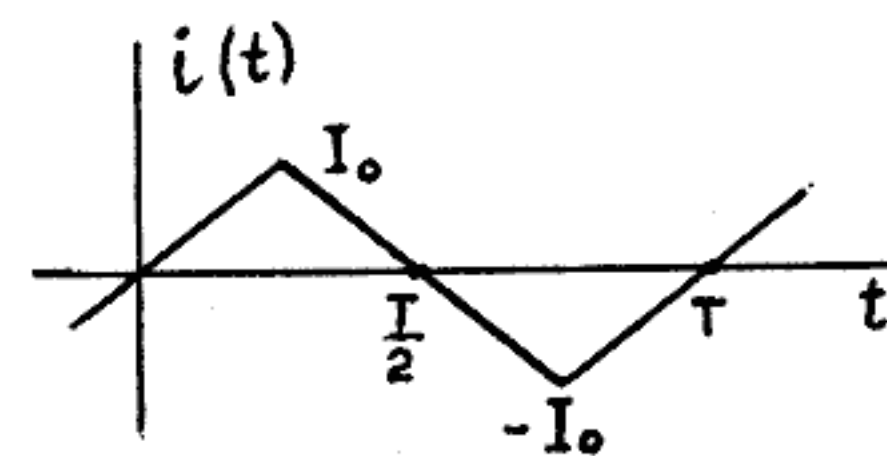


Рис. I.20

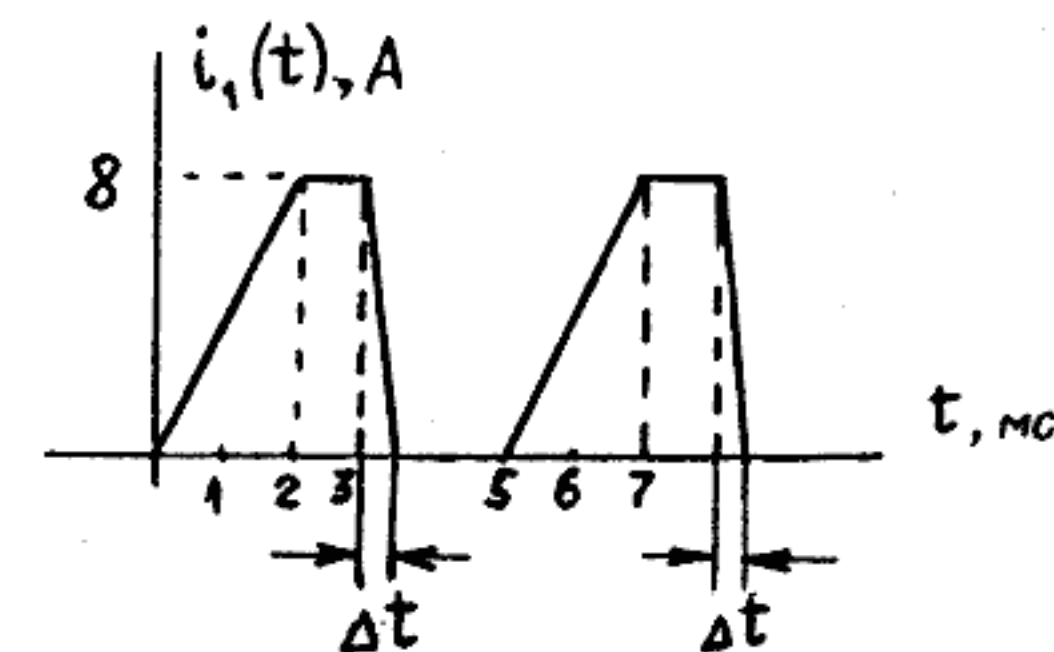


Рис. I.21

I.17. В системе электронного зажигания современных автомобилей используется коммутатор тока в первичной цепи катушки зажигания. Напряжение, возникающее во вторичной цепи катушки зажигания, вызывает искру в промежутке автомобильной свечи. Эквивалентная упрощенная схема системы зажигания приведена на рис. I.16. Форма импульсов тока коммутатора $i_1(t)$ показана на рис. I.21. Время нарастания тока составляет порядка 2 мс. Индуктивность первичной катушки $L_1 = 1$ мГн, вторичной катушки — $L_2 = 10$ Гн. Взаимная индуктивность $M = 100$ мГн. Определить напряжения в первичной и вторичной цепях катушки зажигания и построить соответствующие графики. Определить время спада импульса тока, при котором во вторичной цепи катушки напряжение достигает 20 кВ.

2. ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Задача анализа цепей состоит в нахождении тока и (или) напряжения на одной или нескольких ветвях заданной цепи при известных независимых источниках тока и (или) напряжения. Анализ цепей базируется на двух основных принципах: I) принципе эквивалентности, позволяющем заменять цепь или ее часть другой, более простой цепью, не нарушая эквивалентности цепи по отношению к внешним

выводам; 2) принципе замещения, утверждающем, что любой элемент цепи с известным током или напряжением можно заменить соответствующим идеальным источником тока или напряжения.

При исследовании линейных цепей широко используется метод суперпозиции, согласно которому реакцию от множества воздействий можно находить в виде суммы реакций на каждое из отдельных воздействий.

Наиболее распространенным методом преобразования цепей является замена параллельно или последовательно соединенных элементов одним эквивалентным. Если же требуется определить напряжение на одном из последовательно соединенных элементов или ток через один из параллельно соединенных элементов, можно воспользоваться уравнениями делителя напряжения или делителя тока соответственно. Иногда упростить цепь позволяет эквивалентная замена треугольного соединения одноименных элементов звездообразным или наоборот.

Другой метод преобразования состоит в замене цепи, содержащей независимые источники тока и (или) напряжения и сопротивления, одним эквивалентным источником тока или напряжения со своим внутренним сопротивлением. Эта замена проводится на основании теоремы Тевенина (источник напряжения) или теоремы Нортона (источник тока).

В том случае, когда цепь содержит несколько независимых источников напряжения или тока, а требуется определить напряжение или ток через одну из ветвей, удобным оказывается использование метода наложения.

Если цепь довольно сложная и разветвленная, то лучше всего воспользоваться методом узловых напряжений (потенциалов). Этот метод позволяет определить напряжение в каждом из узлов схемы, измеряемое относительно напряжения опорного узла, через напряжения всех других узлов схемы. При этом можно ввести понятия собственной проводимости каждого узла и эквивалентной проводимости между соседними узлами либо составить уравнения по закону Кирхгофа для токов в каждом узле. Разрешая составленную систему линейных уравнений относительно искомого узлового напряжения или нескольких узловых напряжений, получим решение, позволяющее найти ток или напряжение на любой ветви анализируемой цепи.

Часто радиоэлектронные цепи имеют так называемую лестничную структуру, при этом источник подключается с одной стороны, а интересуются напряжением или током с другой стороны лестничной структуры. В этом случае для анализа можно воспользоваться довольно простыми выражениями, существенно облегчающими анализ цепи.

В целом методы преобразований позволяют проводить анализ цепей без привлечения формальных приемов и способствуют развитию интуитивных представлений и навыков анализа относительно простых цепей.

У п р а ж н е н и е 2.1. Для схемы, изображенной на рис. 2.1, найти эквивалентные сопротивления между выводами a и b , c и d .

Рассчитаем сопротивление R_{ab} . Для этого сначала найдем эквивалентное сопротивление параллельно включенных сопротивлений R_4 и R_5 :

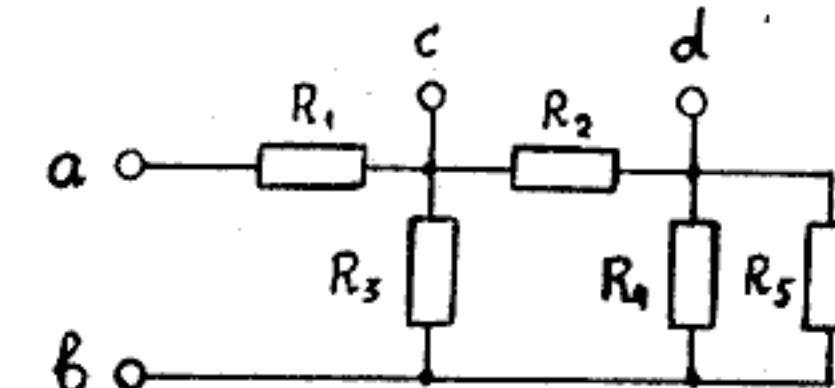


Рис. 2.1

$$R_{45} = R_4 R_5 / (R_4 + R_5).$$

Сопротивление R_{45} соединено последовательно с R_2 . Их общее сопротивление $R_{II} = R_2 + R_{45}$. Схема упростилась до известной последовательно-параллельной структуры, в которой сопротивление R_1 включено последовательно с двумя параллельно включенными сопротивлениями R_3 и R_{II} . Тогда искомое сопротивление R_{ab} находится следующим образом:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_3 R_{II}}{R_3 + R_{II}}.$$

Определим сопротивление R_{cd} . Сопротивления R_4 и R_5 соединены параллельно и их эквивалентное сопротивление R_{45} уже известно. Сопротивление R_3 соединено последовательно с найденным сопротивлением R_{45} . Их общее сопротивление $R_{II} = R_3 + R_{45}$. Теперь видно, что сопротивление R_{cd} состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений R_{II} и R_2 :

$$R_{cd} = R_2 R_{II} / (R_2 + R_{II}).$$

У п р а ж н е н и е 2.2. Найти эквивалентное сопротивление цепи, представленной на рис. 2.2, между точками a и g и ток через сопротивление R_4 , если напряжение между точками a и g известно.

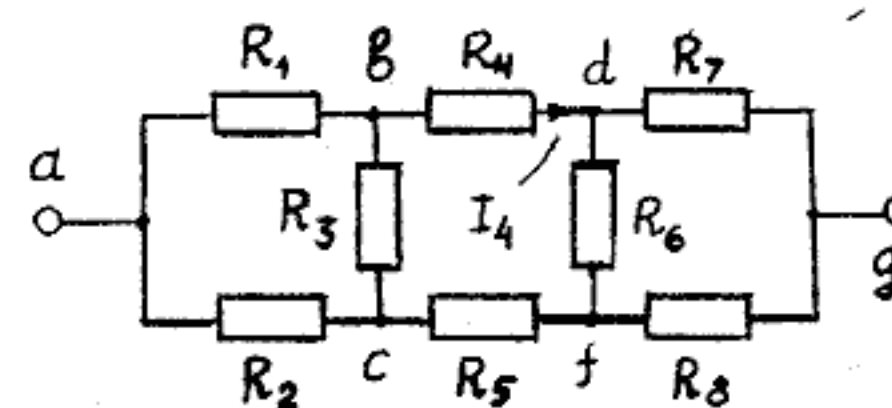


Рис. 2.2

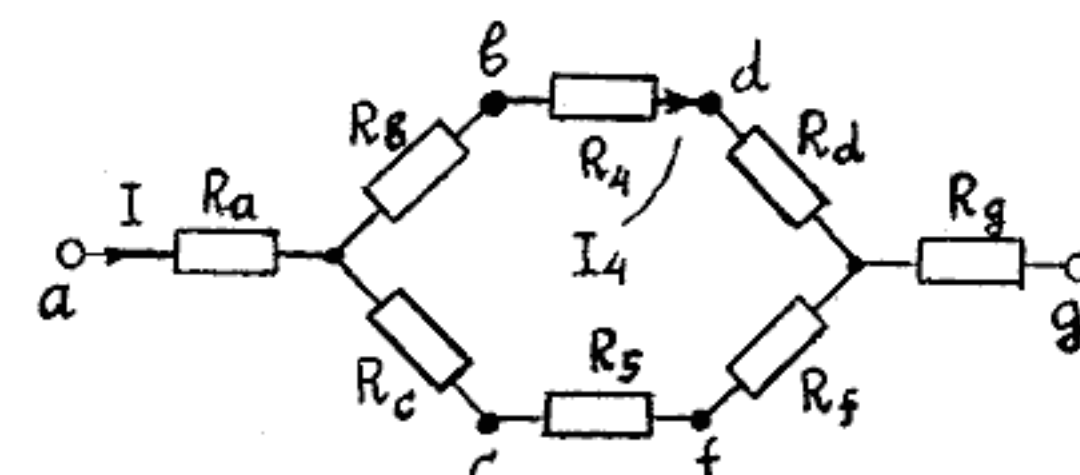


Рис. 2.3

Эту задачу наиболее рационально решить с помощью метода преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду. Заменим треугольники сопротивлений abc и dfg эквивалентными звездами (рис. 2.3). Подсчитаем сопротивления лучей звезды R_a, R_b, R_c эквивалентной треугольнику abc сопротивлений R_1, R_2, R_3 :

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Аналогично находятся сопротивления лучей звезды R_d, R_f и R_g . Теперь нетрудно определить эквивалентное сопротивление всей цепи между точками a и g :

$$R_{ag} = R_a + \frac{R_I R_{II}}{R_I + R_{II}} + R_g,$$

где

$$R_I = R_b + R_4 + R_d, \quad R_{II} = R_c + R_5 + R_f.$$

Найдем ток I в неразветвленной части цепи (рис. 2.3). Если известно напряжение V между точками a и g , то согласно закону Ома

$$I = V / R_{ag}.$$

Воспользуемся соотношением делителя тока и найдем ток через сопротивление R_4 :

$$I_4 = I \cdot R_{II} / (R_I + R_{II}).$$

У п р а ж н е н и е 2.3. Методом эквивалентного источника напряжения найти ток I_5 (рис. 2.4), протекающий через сопротивление R_5 мостовой схемы.

Прежде всего часть схемы, подключенную к сопротивлению R_5 , т.е. источник E , сопротивления R_1, R_2, R_3, R_4 , заменим эквивалентным источником напряжения E_3 с внутренним сопротивлением R_3 (рис. 2.5).

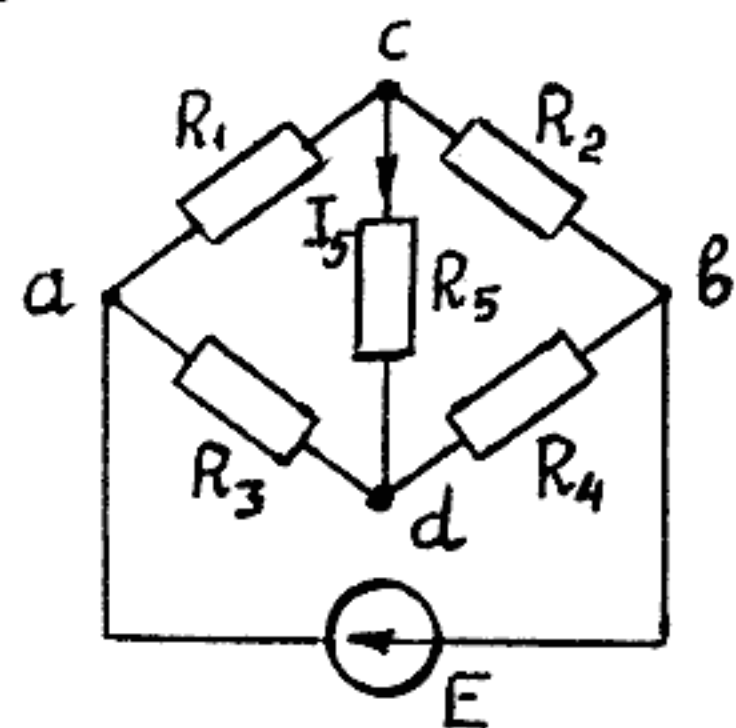


Рис. 2.4

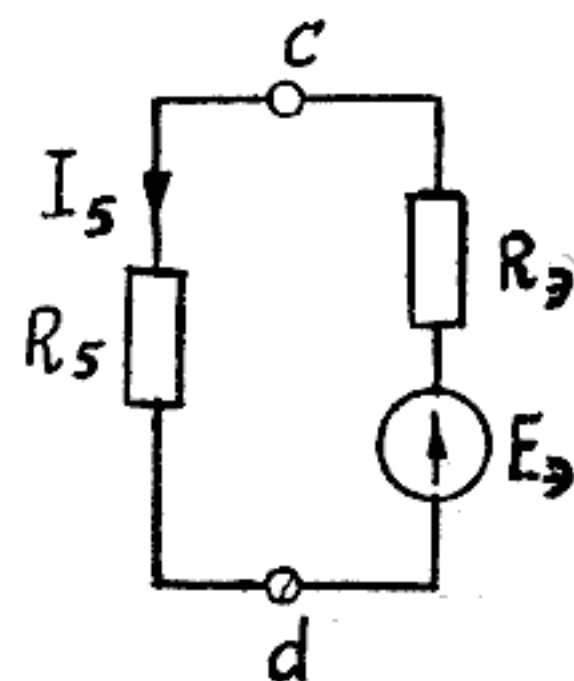


Рис. 2.5

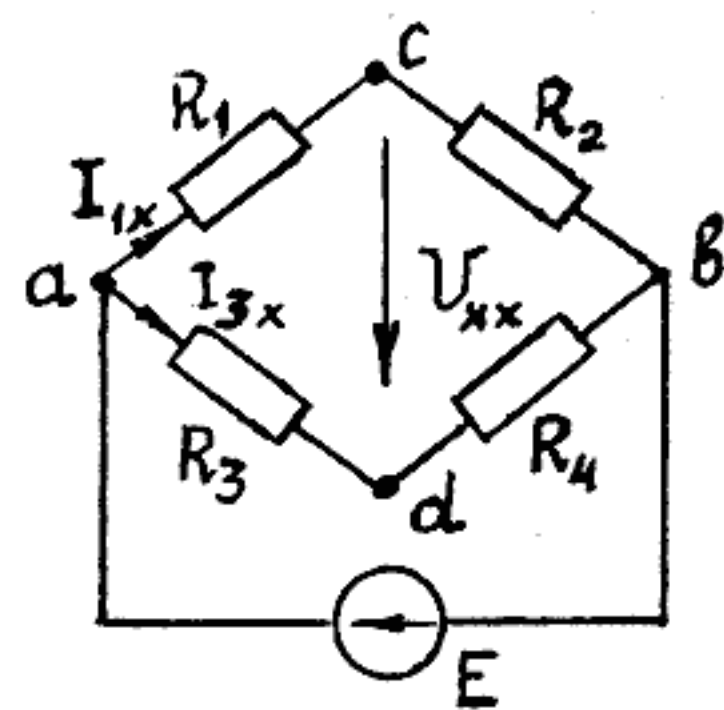


Рис. 2.6

Определим E_3 , которое является напряжением холостого хода между точками c и d , обозначенное через U_{xx} на рис. 2.6. Найдем падения напряжения на сопротивлениях R_2 и R_4 , используя уравнение делителя напряжения:

$$U_{cb} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad U_{db} = E \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

Теперь можно определить искомое напряжение:

$$E_3 = U_{xx} = U_{cb} - U_{db} = U_c - U_b - (-U_d + U_b) = U_c - U_d.$$

Сопротивление эквивалентного источника напряжения является сопротивлением цепи относительно точек c и d при обнуленных источниках; в данном случае источник напряжения E заменяется коротким замыканием между точками a и b .

В результате цепь примет вид, показанный на рис. 2.7. Таким образом, сопротивление эквивалентного источника напряжения является последовательным соединением двух пар параллельно соединенных сопротивлений $(R_1 \parallel R_2)$ и $(R_3 \parallel R_4)$:

$$R_{cd} = R_3 = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_3 R_4 / (R_3 + R_4).$$

У п р а ж н е н и е 2.4. В схеме, представленной на рис. 2.8, определить ток I_E через источник напряжения и напряжение U_I на источнике тока.

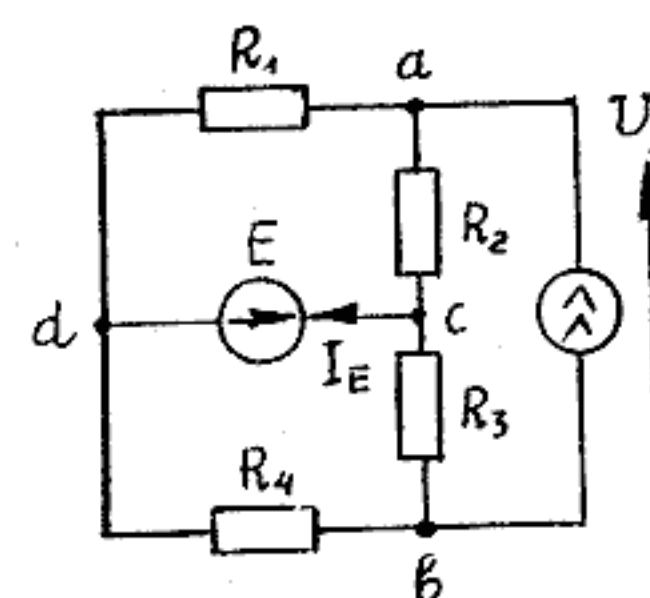


Рис. 2.8

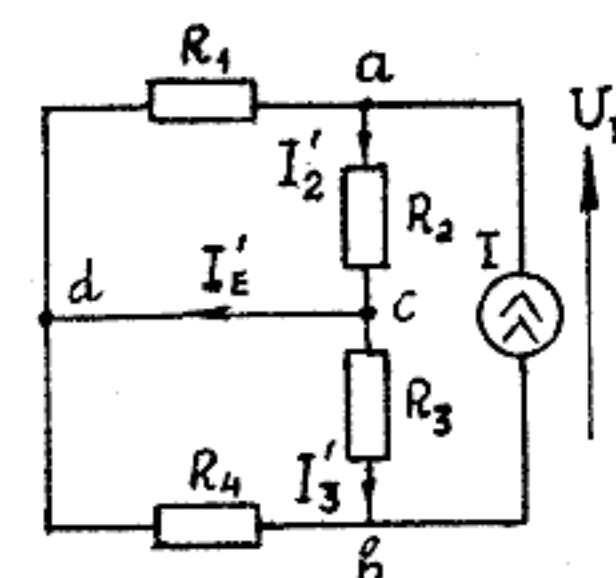


Рис. 2.9

Решим данную задачу методом наложения. Сначала оставим в схеме источник тока, обнулив источник напряжения; в результате схема примет вид, показанный на рис. 2.9. Теперь найдем парциальные ток I_E' и напряжение U_I' , обусловленные действием только источника тока I .

Определим сопротивлением схемы между точками a и b :

$$R_{ab} = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4};$$

в соответствии с законом Ома получим напряжение $U_I' = -I R_{ab}$. Знак "-" объясняется выбором противоположных направлений тока через сопротивление R_{ab} и напряжения на нем.

Токи I_2' и I_3' являются токами в ветвях соответствующих делителей тока $R_1 R_2$ и $R_3 R_4$, и поэтому определяются выражениями

$$I_2' = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad I_3' = I \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

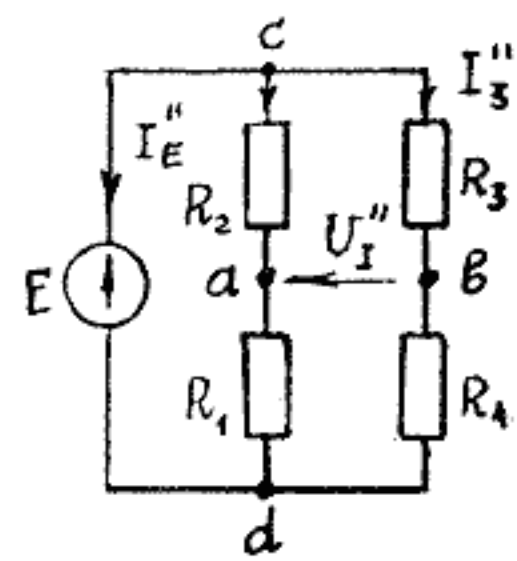


Рис. 2.10

Найдем ток I_E' с помощью закона Кирхгофа для токов, втекающих в узел c :

$$I_E' = I_2' - I_3'.$$

Переходим к определению парциальных тока и напряжения при действии источника напряжения и обнулении источника тока I (рис. 2.10). Они обозначены I_E'' и U_I'' . Найдем общее сопротивление между точками c и d :

$$R_{cd} = (R_1 + R_2) (R_3 + R_4) = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Теперь легко определить искомый ток

$$I_E'' = -E / R_{cd}.$$

Напряжение

$$U_I'' = U_b - U_a = U_{bd} - U_{ad},$$

а напряжения U_{bd} и U_{ad} определяются уравнениями делителя напряжения, задаваемого источником E :

$$U_{ad} = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_{bd} = E \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

После того как найдены парциальные токи и напряжения, можно найти общие ток и напряжение путем алгебраического суммирования:

$$I_E = I_E' + I_E'', \quad U_I = U_I' + U_I''.$$

У п р а ж н е н и е 2.5. С помощью метода узловых напряжений определить напряжение V_{cd} в схеме, представленной на рис.2.11.

Решение задачи начинаем с выбора опорного узла, в качестве которого выберем узел, в котором сходятся наибольшее число ветвей и (или) источников напряжения. С этой точки зрения выбираем опорным узел b .

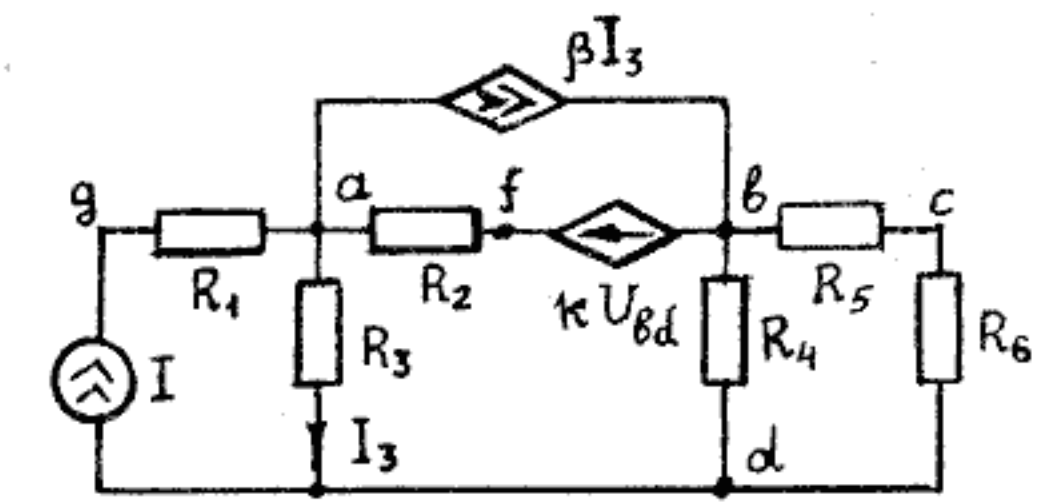


Рис. 2.11

Далее вводим обозначения узловых напряжений. Узел - это точка соединения любых двух и более элементов. В нашей схеме - пять узлов, не считая опорного. Но не все напряжения в узлах следует обозначать в качестве узловых. Нужно исключить те узлы, напряжения на которых можно найти непосредственно по схеме, не решая системы уравнений. Напряжение узла f по отношению к узлу b известно: оно равно напряжению источника напряжения $k U_{bd}$, и поэтому узел f исключается. Напряжение узла a относительно узла d также известно заранее: $U_a = U_d + I R_1$, и поэтому этот узел также исключается. Можно также исключить узел c , поскольку по уравнению делителя напряжения $U_{cd} = U_{db} R_5 / (R_5 + R_6)$. Итак, осталось всего два узла, a и d , напряжения на которых относительно опорного узла b обозначаем U_a и U_d соответственно.

Теперь осталось составить два уравнения по закону Кирхгофа для токов соответствующих узлов. Удобнее всего считать, что положительные направления токов выбираются выходящими из данного узла. Для узла a имеем

$$\frac{U_a - k U_{bd}}{R_2} + \beta I_3 + \frac{U_a - U_d}{R_3} - I = 0.$$

Выразим все переменные, входящие в уравнение, через узловые напряжения и упорядочим запись. При этом учтем, что $U_{bd} = -U_d$, $I_3 = (U_a - U_d) / R_3$. Независимые переменные переносим в правую часть уравнения:

$$U_a \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\beta + 1}{R_3} \right) + U_d \left(\frac{k}{R_2} - \frac{\beta + 1}{R_3} \right) = I.$$

Составим уравнение для суммы токов, вытекающих из узла d :

$$\frac{U_d - U_a}{R_3} + \frac{U_d}{R_4} + \frac{U_d}{R_5 + R_6} + I = 0.$$

После преобразований получим второе уравнение системы:

$$-U_a \frac{1}{R_3} + U_d \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6} \right) = -I.$$

Разрешив полученную систему относительно напряжения U_d , найдем искомое напряжение по формуле делителя напряжения:

$$U_{cd} = -U_d \frac{R_6}{R_5 + R_6}.$$

Знак "-" учитывает полярность искомого напряжения относительно узлового напряжения U_d .

ЗАДАЧИ

2.1. Для схем, приведенных на рис. 2.12 – 2.27, определить:

- 1) эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов источника напряжения при нулевом источнике тока;
- 2) эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов источника тока при обнуленном источнике напряжения;
- 3) ток, протекающий через источник напряжения, и напряжение на источнике тока, воспользовавшись методом наложения;
- 4) токи и напряжения на всех элементах схемы, включая индуктивности и емкости, используя метод узловых напряжений, теоремы Тевенина и Нортон, принцип замещения.

Проверить правильность расчетов путем составления уравнений по закону Кирхгофа для токов всех узлов схемы.

При проведении расчетов задаться численными значениями параметров элементов схемы произвольно в следующих интервалах:

$R_1 = 5 \dots 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 10 \dots 15 \text{ кОм}$, $R_3 = 8 \dots 13 \text{ кОм}$, $R_4 = 13 \dots 18 \text{ кОм}$, $R_5 = 3 \dots 8 \text{ кОм}$. Напряжение источника $E = 1 \dots 10 \text{ В}$, ток источника $I = 0,5 \dots 2 \text{ мА}$.

2.2. Для схем, изображенных на рис. 2.28 – 2.43, определить коэффициент передачи указанного напряжения или тока по отношению к независимому источнику схемы. При расчетах задаться численными значениями параметров элементов схемы и управляемых источников произвольно в заданных интервалах: $R_0 = 20 \dots 40 \text{ кОм}$, $R_1 = 10 \dots 30 \text{ кОм}$, $R_2 = 5 \dots 20 \text{ кОм}$, $R_H = R_r = 30 \dots 50 \text{ кОм}$, $\alpha = \beta = 2 \dots 5$, $r = \frac{1}{g} = 15 \dots 30 \text{ кОм}$.

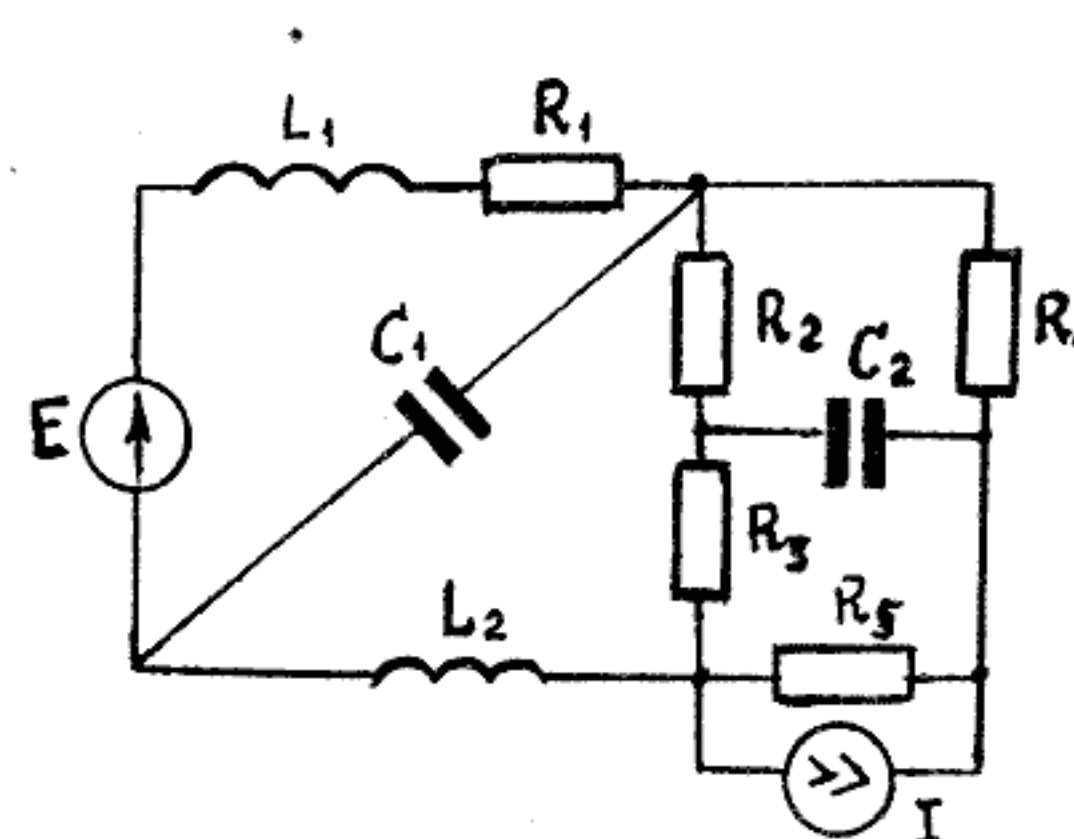


Рис. 2.12

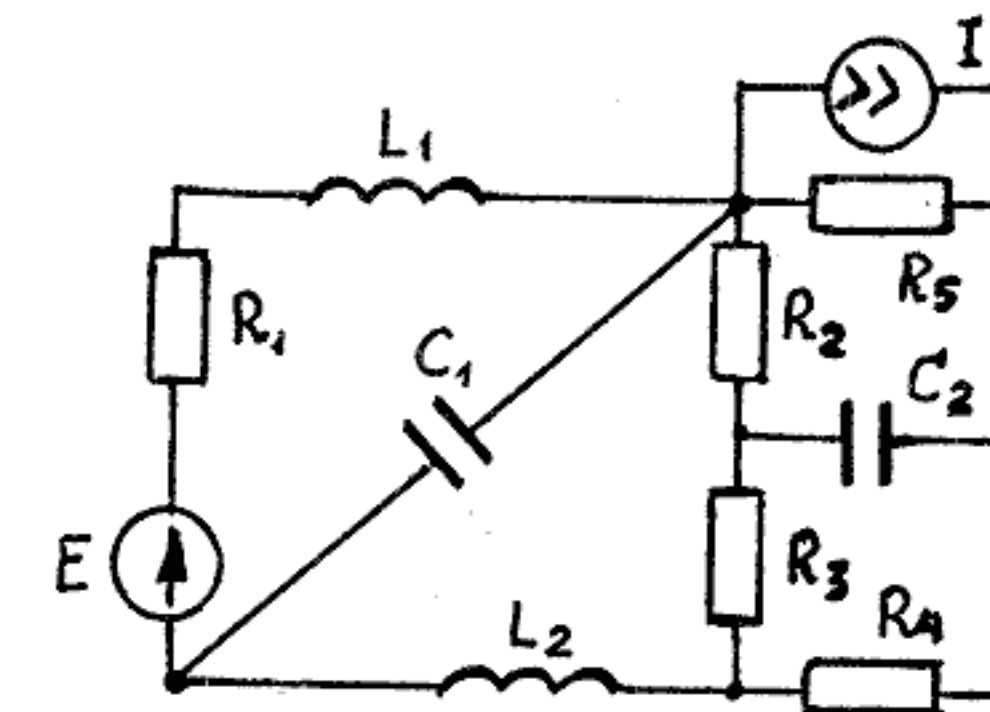


Рис. 2.13

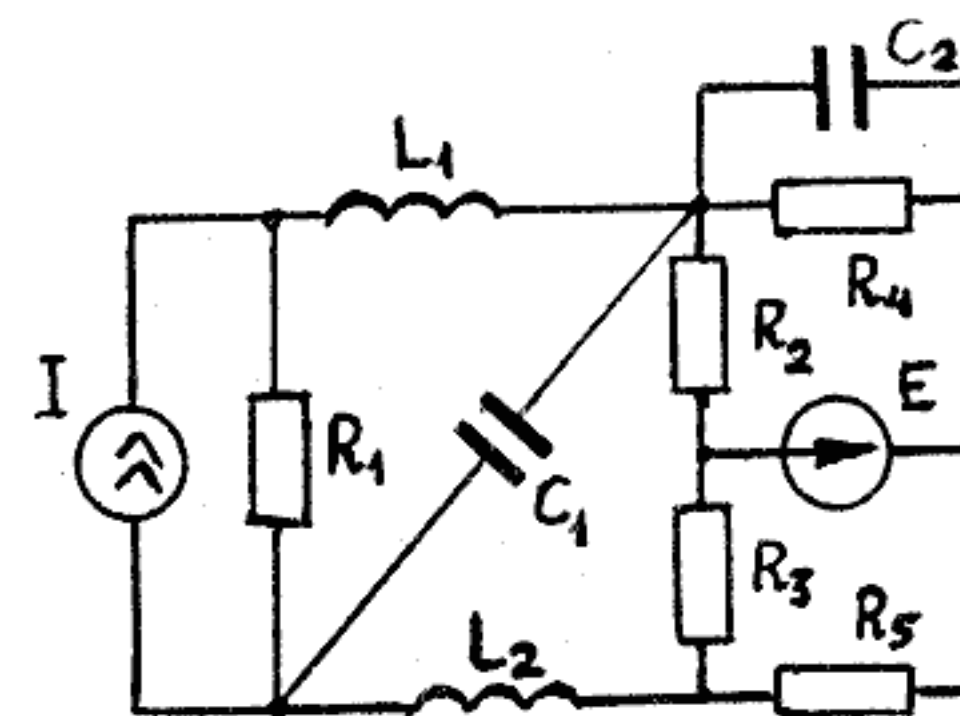


Рис. 2.14

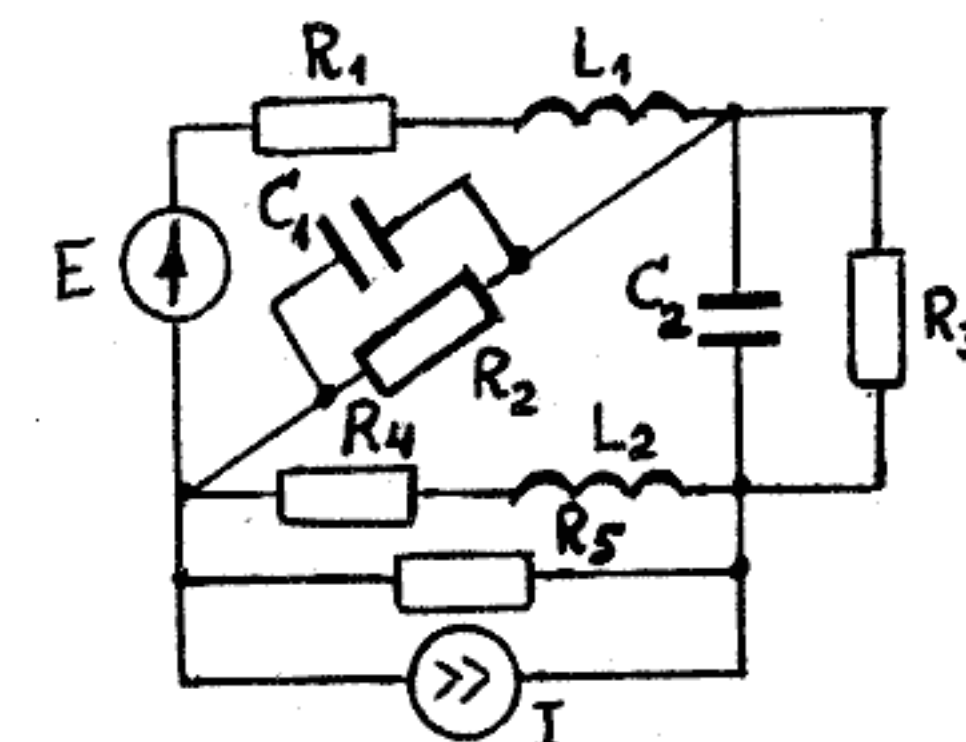


Рис. 2.15

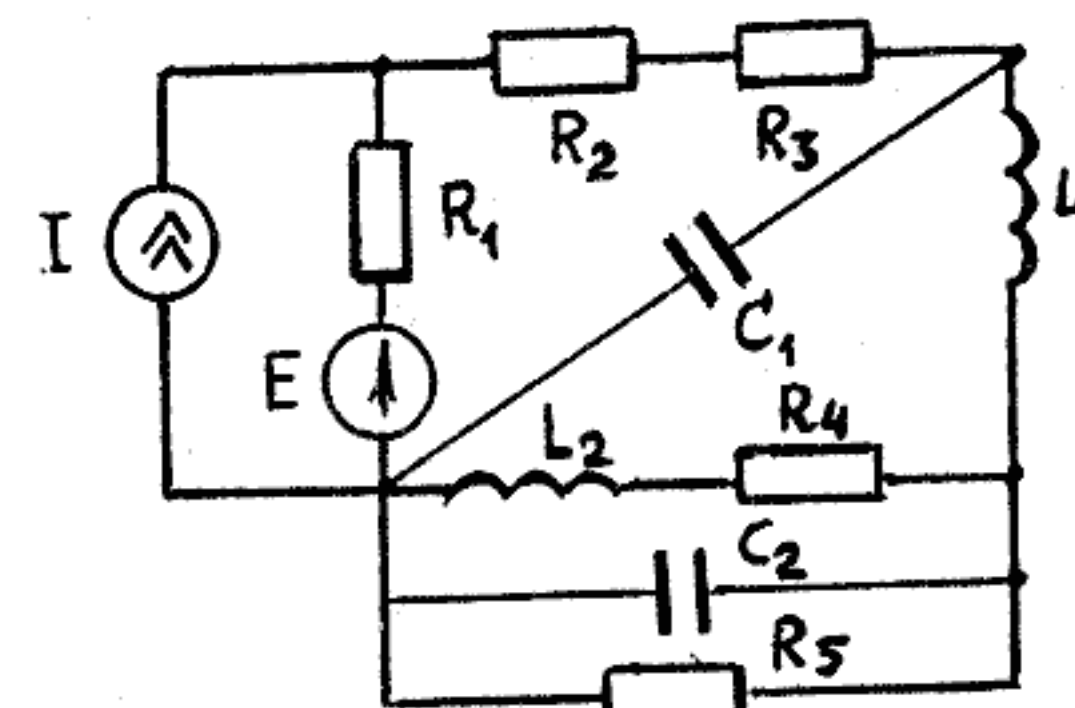


Рис. 2.16

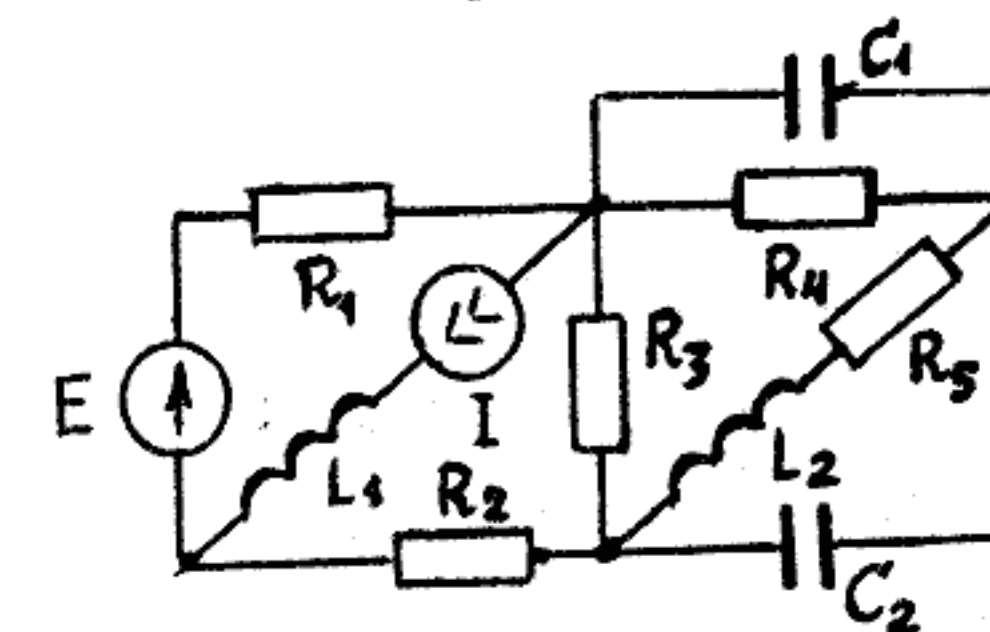


Рис. 2.17

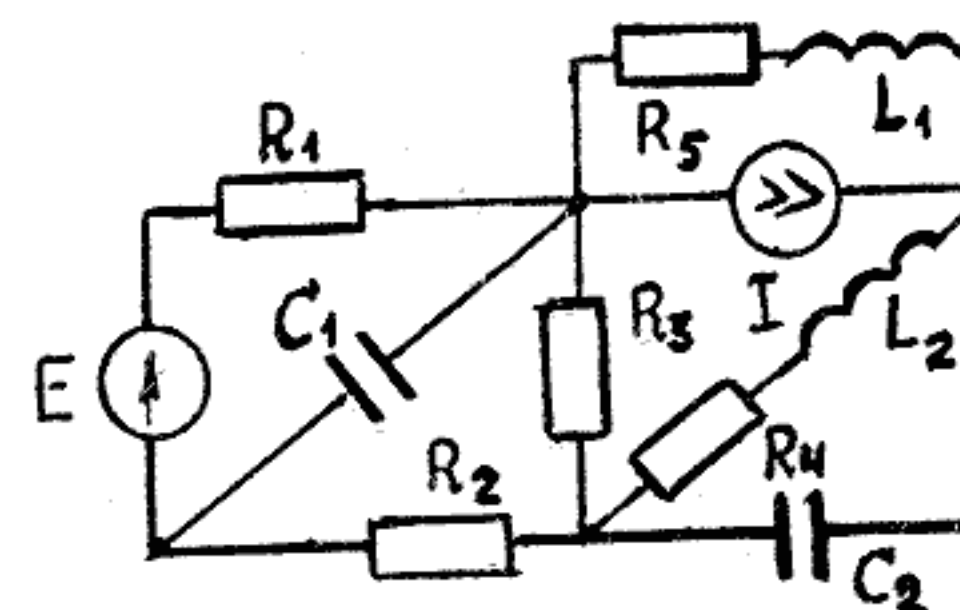


Рис. 2.18

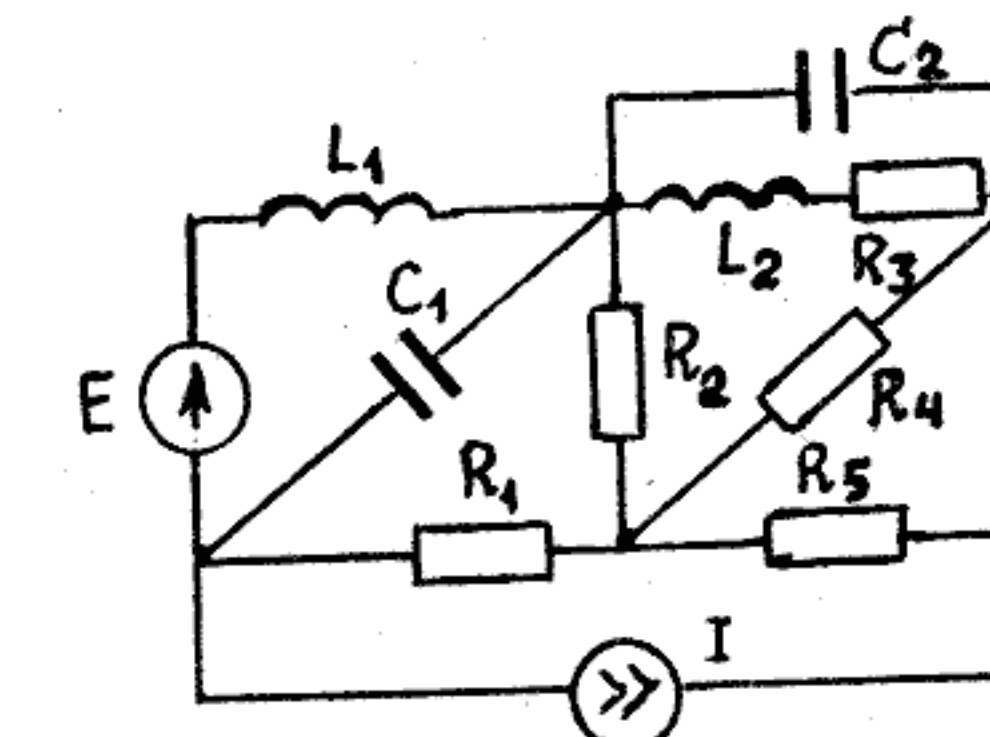


Рис. 2.19

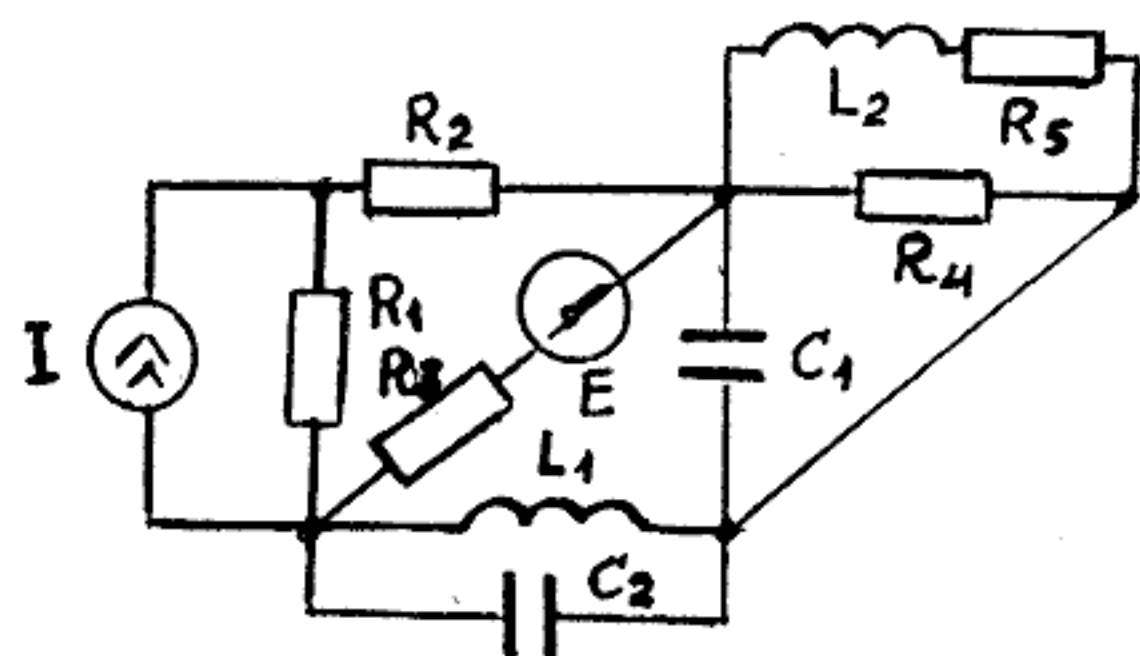


Рис. 2.20

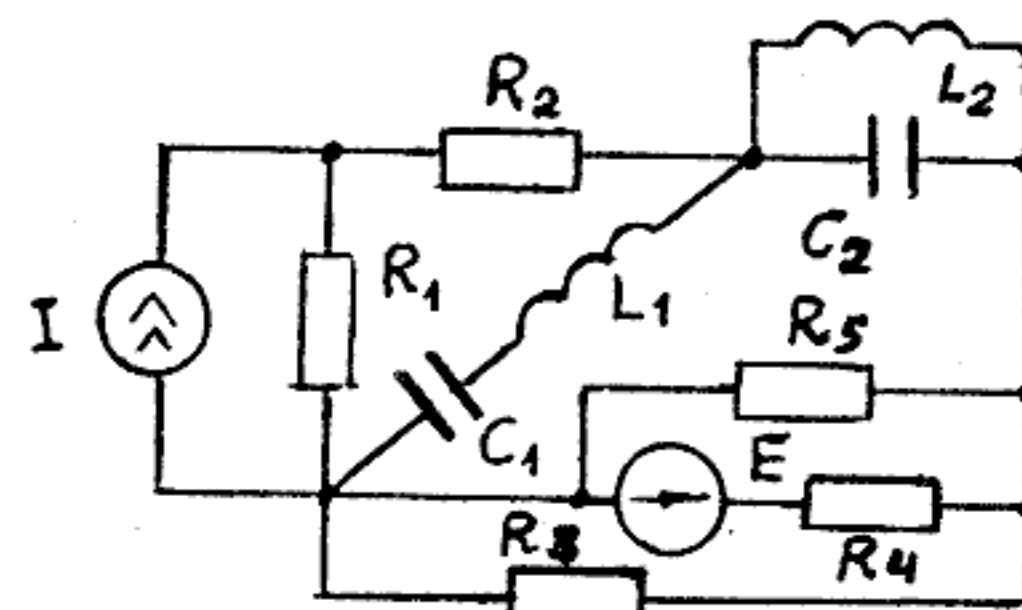


Рис. 2.21

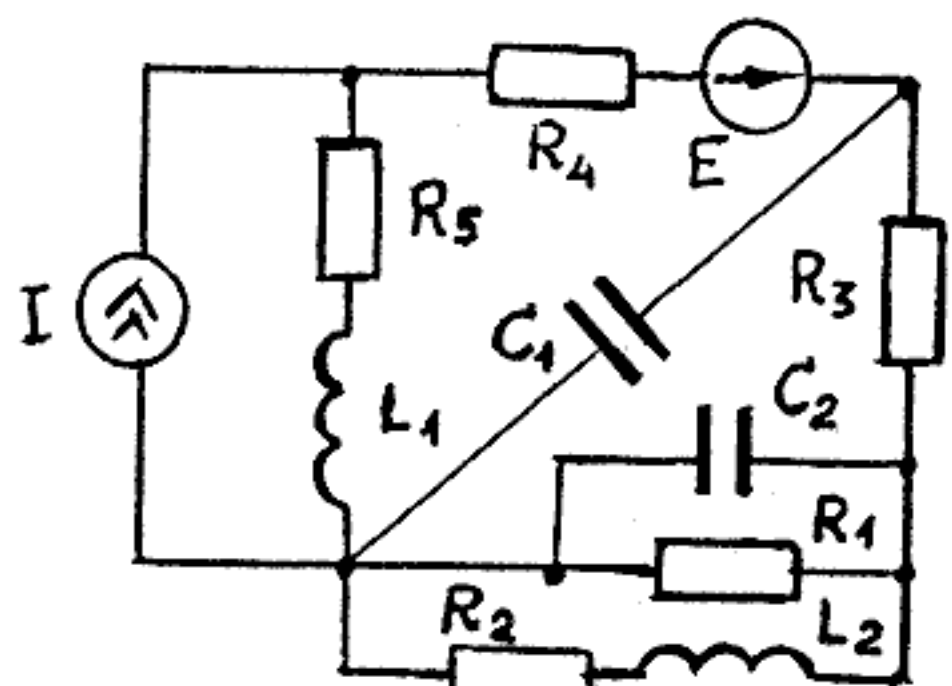


Рис. 2.22

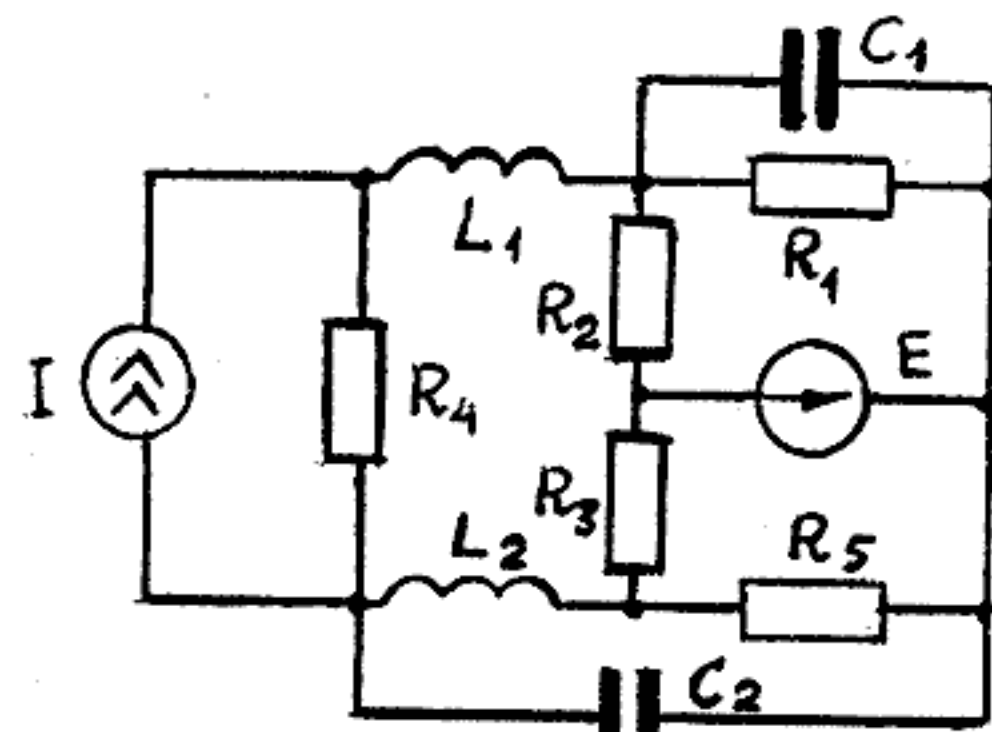


Рис. 2.23

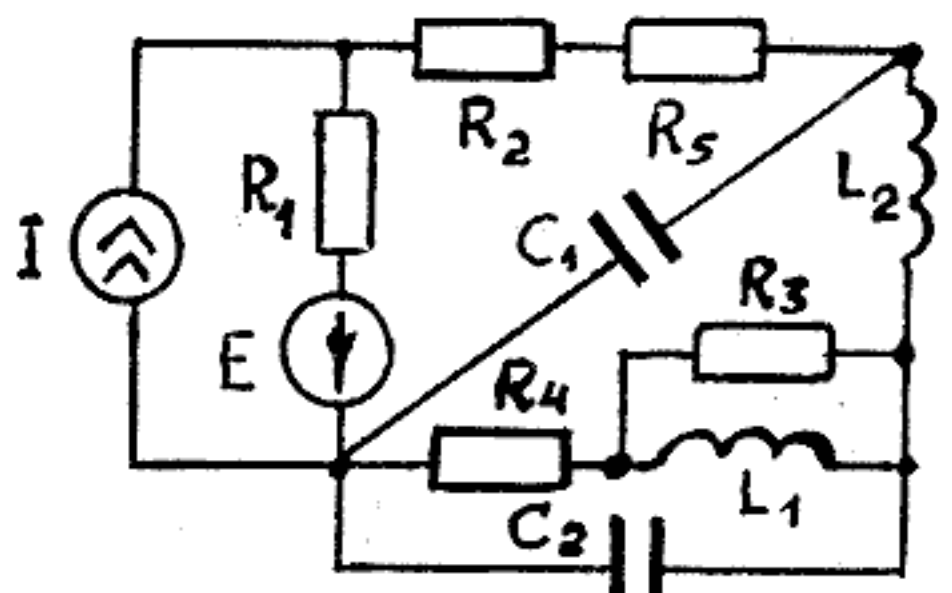


Рис. 2.24

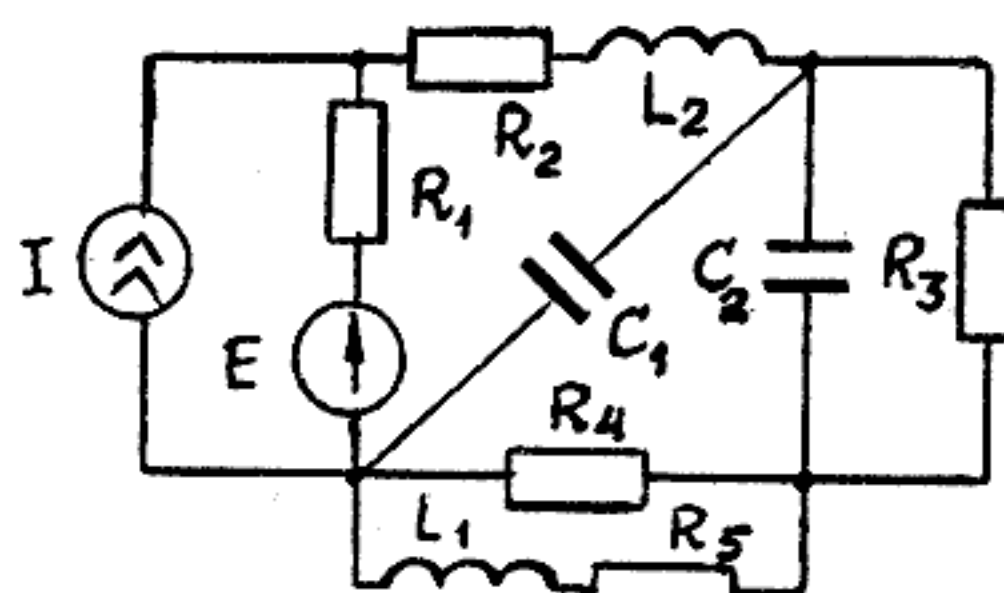


Рис. 2.25

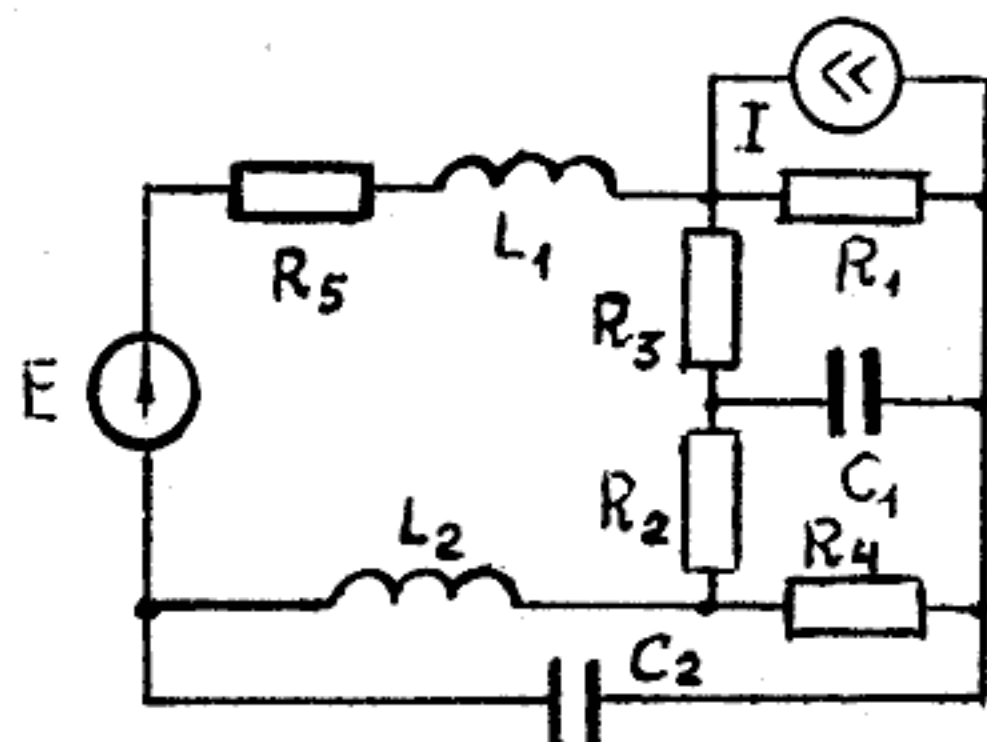


Рис. 2.26

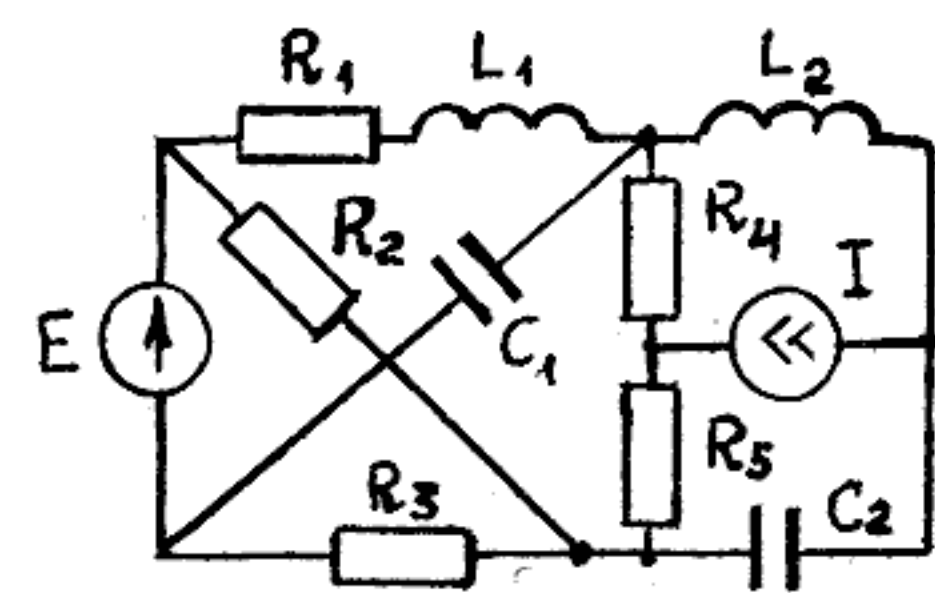


Рис. 2.27

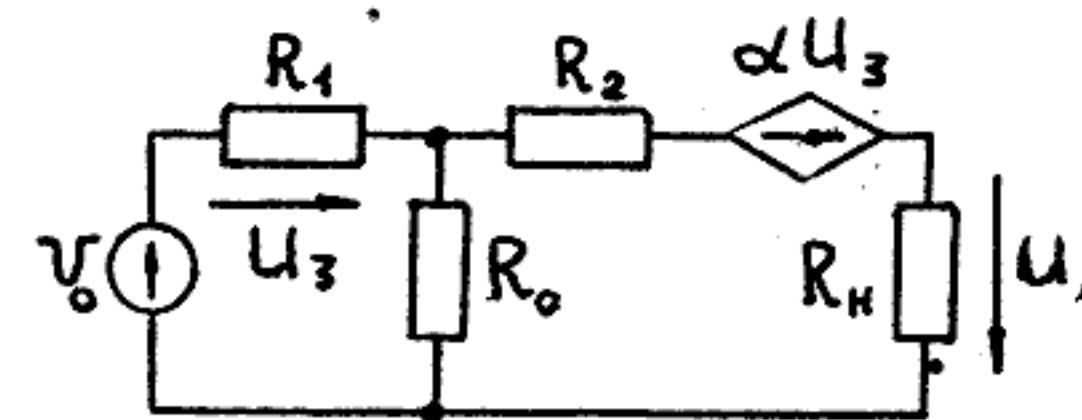


Рис. 2.28

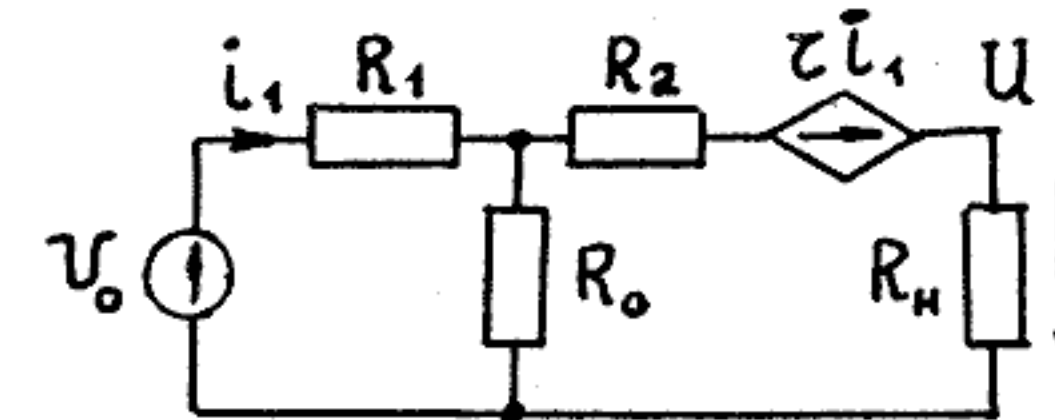


Рис. 2.29

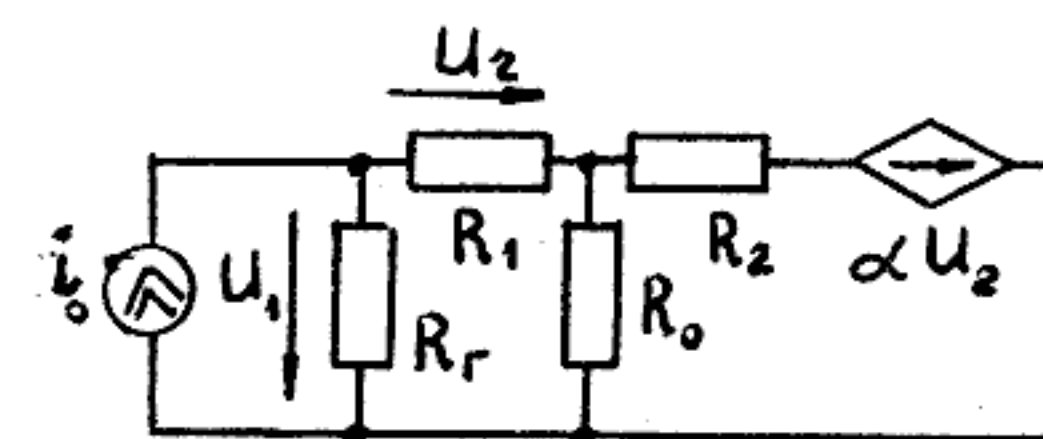


Рис. 2.30

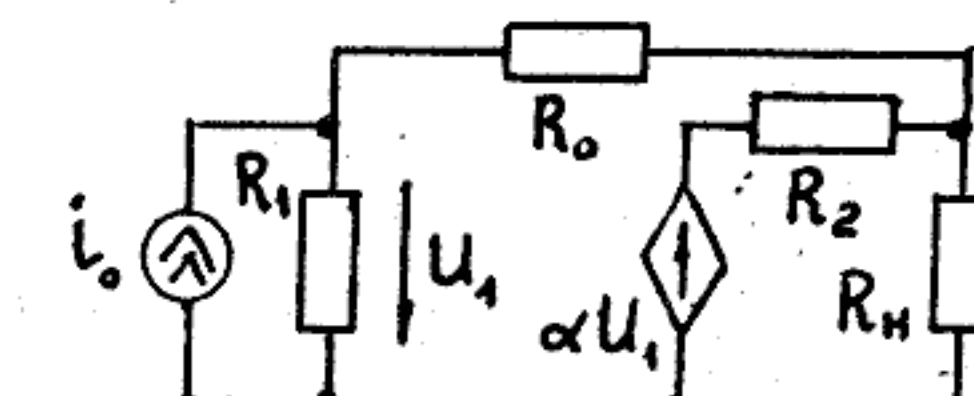


Рис. 2.31

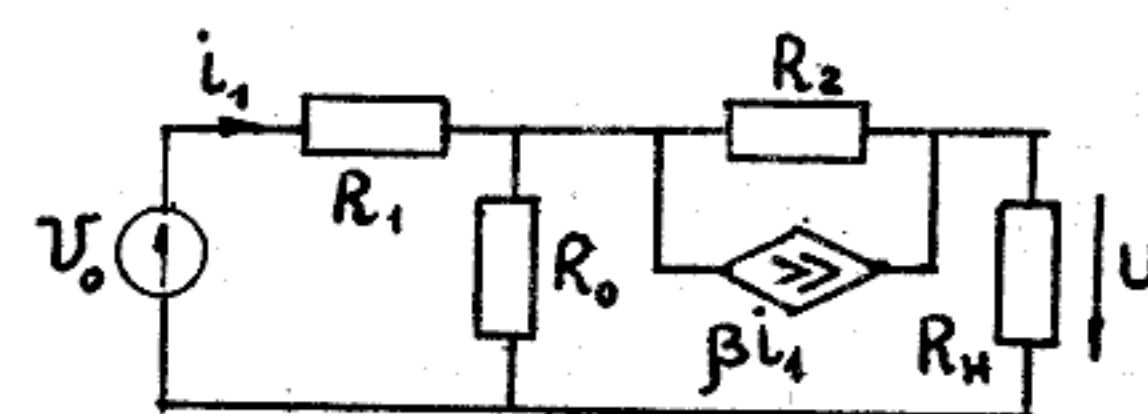


Рис. 2.32

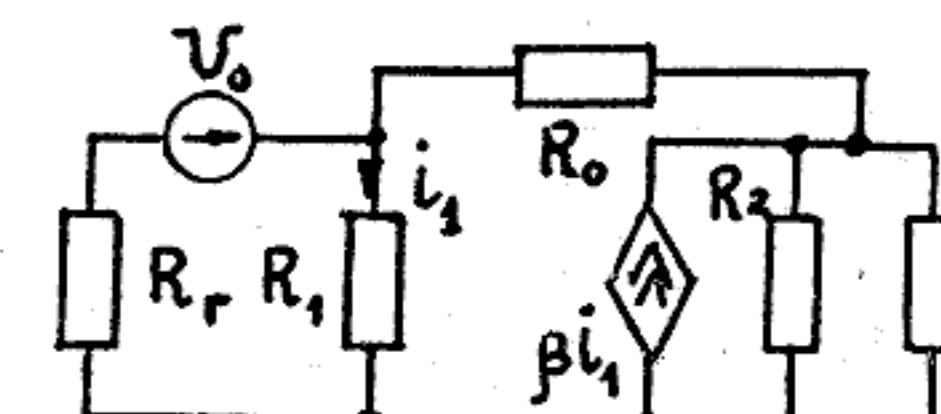


Рис. 2.33

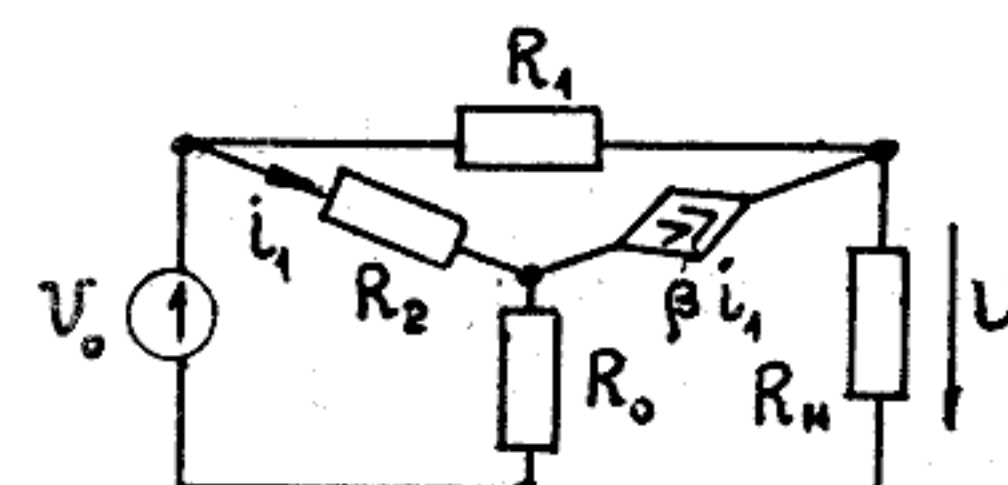


Рис. 2.34

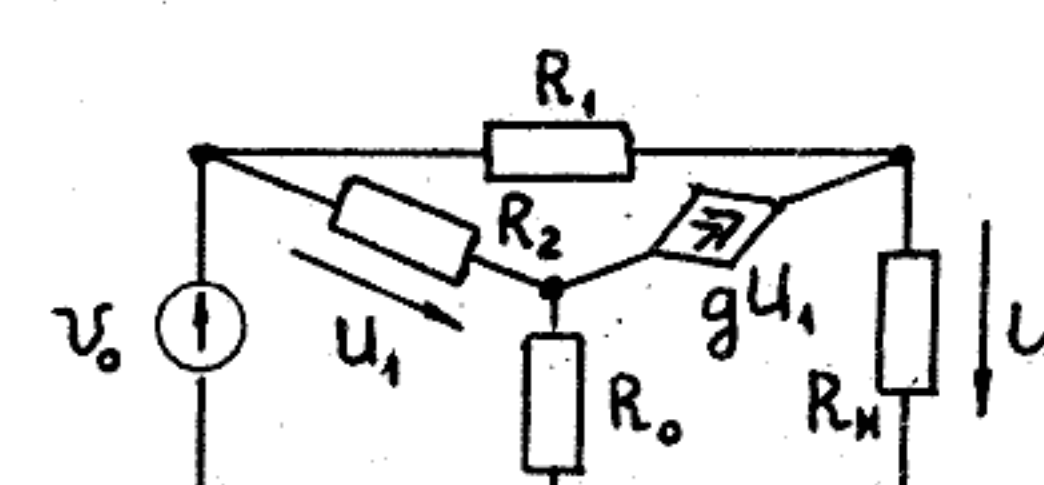


Рис. 2.35

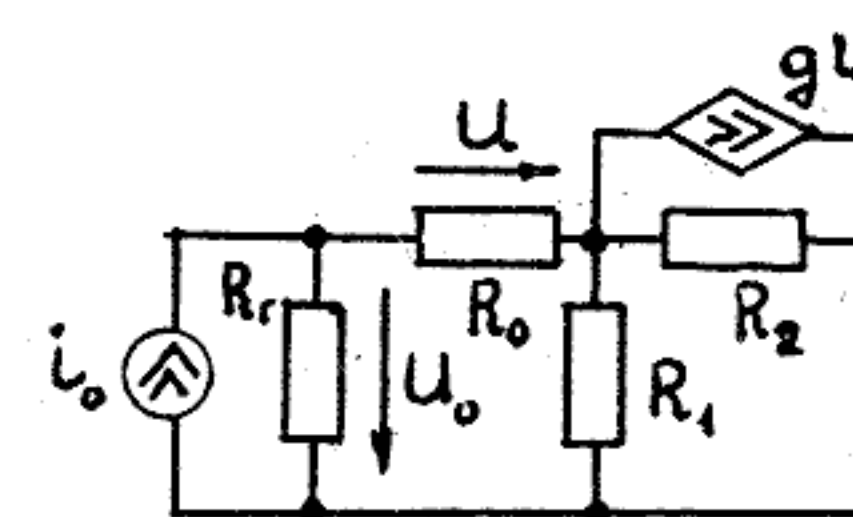


Рис. 2.36

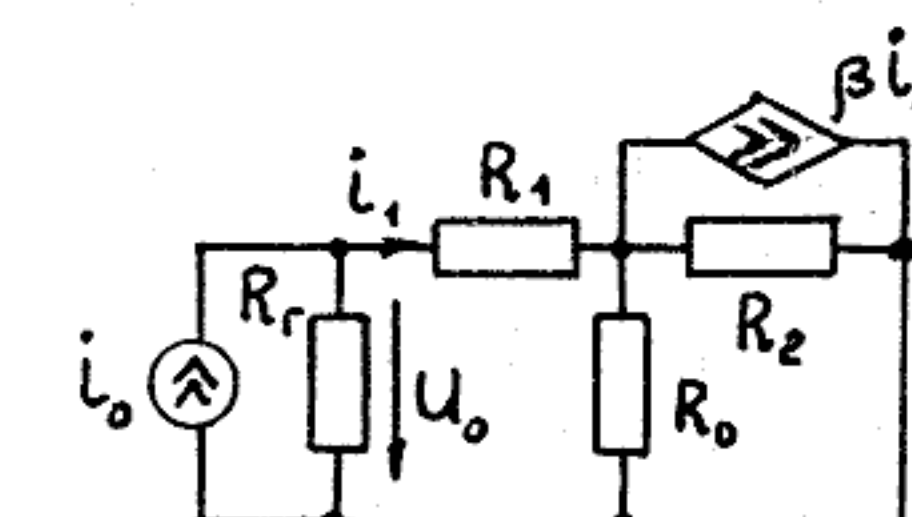


Рис. 2.37

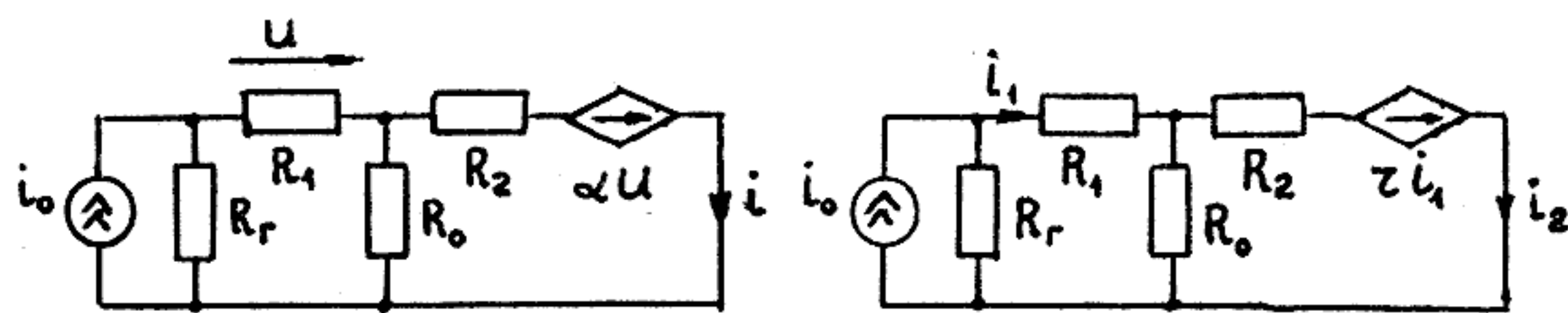


Рис. 2.38

Рис. 2.39

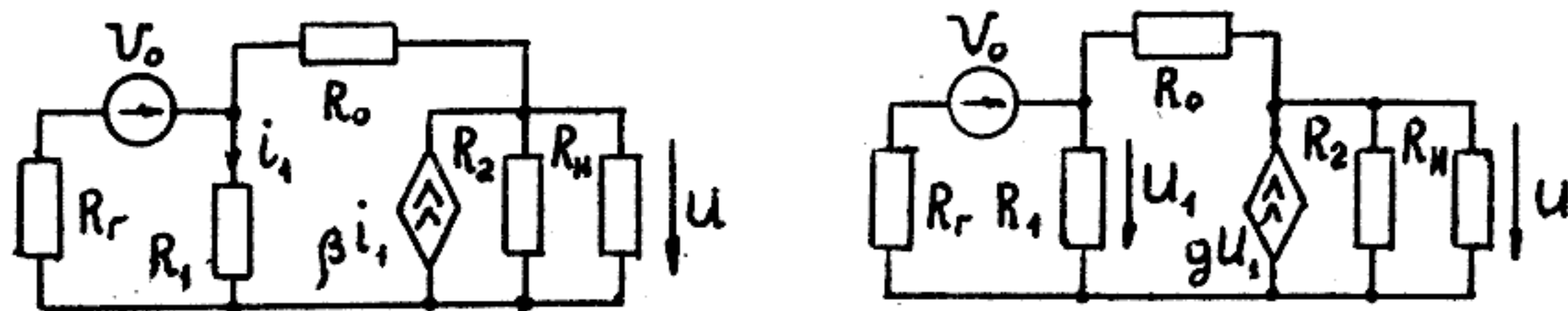


Рис. 2.40

Рис. 2.41

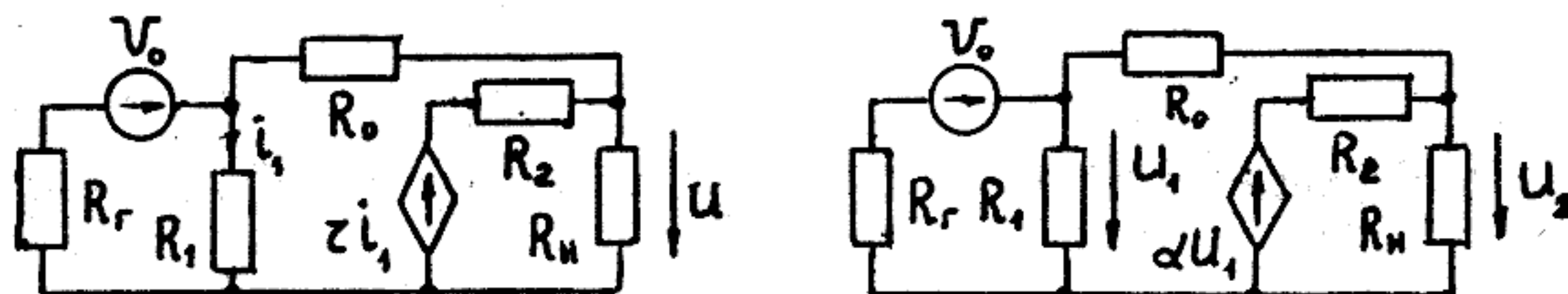


Рис. 2.42

Рис. 2.43

3. СИГНАЛЫ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЛАПЛАСУ

При анализе прохождения сигналов через радиоэлектронные цепи часто приходится по заданному сигналу $s(t)$ определять соответствующее ему изображение по Лапласу $S(p)$ и выполнять обратные операции: $S(p) \rightarrow s(t)$. Обычно набор моделей сигналов, с которыми приходится иметь дело, сравнительно ограничен: это экспоненциальные сигналы (в том числе с комплексными показателями), сигналы типа гармонических, включаемых в момент $t = 0$, а также сигналы, которые можно описать отрезками прямых линий (прямоугольные, треугольные импульсы и т.п.).

Исследуемые цепи — это обычно цепи, составленные из дискретных элементов R, L, C , управляемых источников и, возможно, элементов памяти, осуществляющих задержку сигнала во времени. Передаточные функции таких цепей — дробно-рациональные функции. При наличии элементов памяти в передаточных функциях появляются члены, содержащие множители вида e^{-pT} .

При таких ограничениях на сигналы и цепи нахождение изображения по сигналу и сигнала по изображению — задача сравнительно простая. Можно, как правило, не обращаться к интегральным преобразованиям Лапласа, а воспользоваться таблицами пар сигнал — изображение и основными свойствами преобразования Лапласа (см. приложение).

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО СИГНАЛУ

У п р а ж н е н и е 3.1. Изображение прямоугольного импульса (рис. 3.1, а).

Сигнал $s(t)$ можно представить как сумму двух ступенчатых сигналов с разными знаками и задержкой (рис. 3.1, б):

$$s(t) = 1(t) - 1(t - T).$$

Соответственно изображение

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} = \frac{1}{p} (1 - e^{-pT}).$$

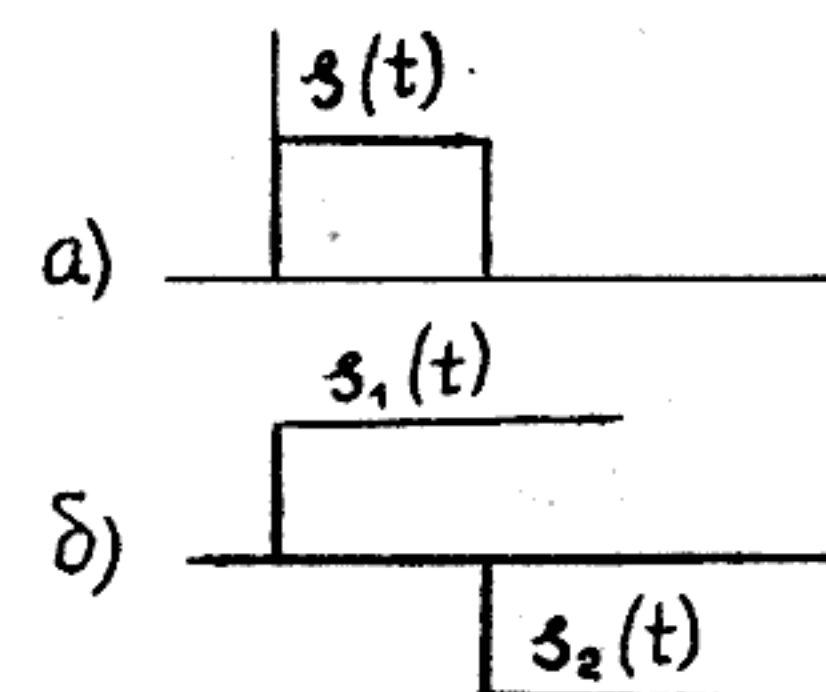


Рис. 3.1

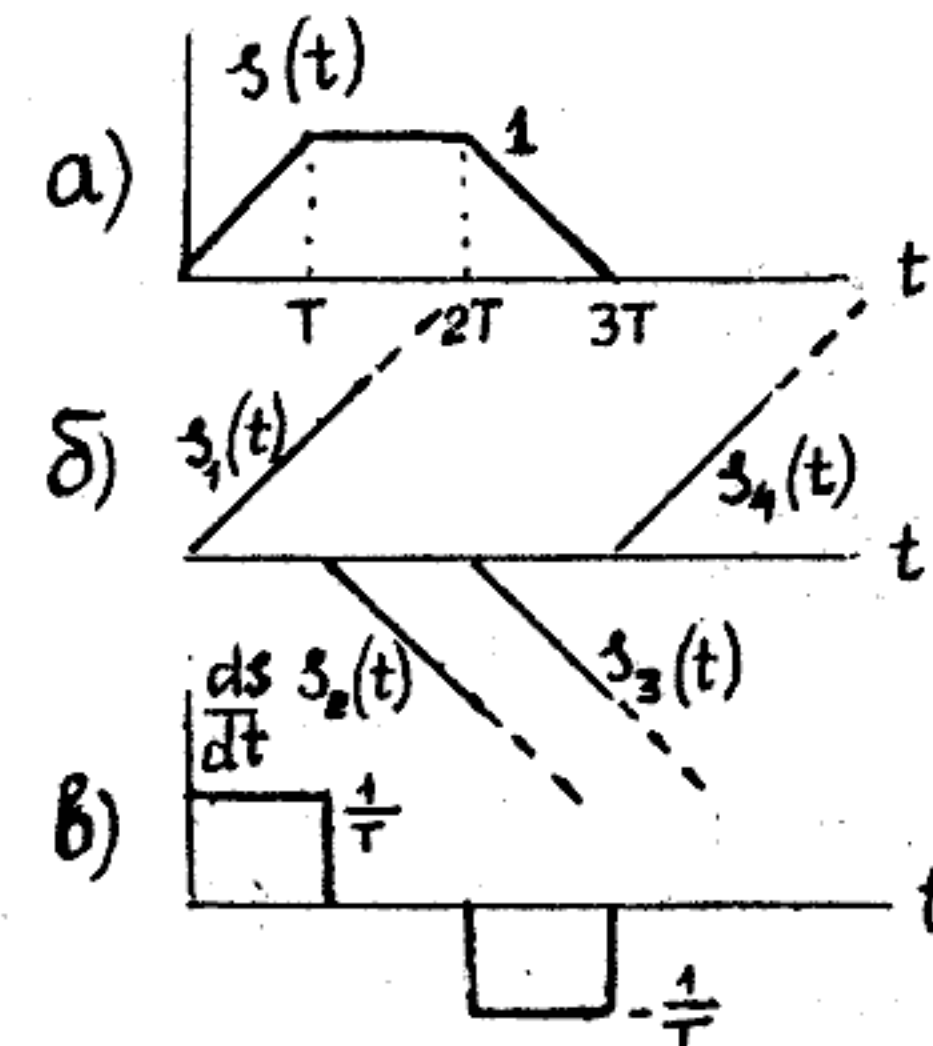


Рис. 3.2

У п р а ж н е н и е 3.2. Изображение импульса вида трапеции (рис. 3.2, а).

Сигнал $s(t)$ может быть разложен на четыре линейно нарастающие компоненты (рис. 3.2, б):

$$s(t) = \frac{1}{T} t \cdot 1(t) - \frac{1}{T} (t - T) \cdot 1(t - T) - \frac{1}{T} (t - 2T) \cdot 1(t - 2T) + \frac{1}{T} (t - 3T) \cdot 1(t - 3T).$$

Соответственно изображение

$$S(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-pT} - \frac{1}{p^2} e^{-2pT} + \frac{1}{p^2} e^{-3pT}.$$

Другой путь нахождения изображения — с использованием производной заданного сигнала $s'(t) = d s(t)/dt$ (рис. 3.2, в). Зная изображение одиночного импульса высотой $1/T$ и длительностью T , запишем сразу изображение сигнала $s'(t)$ как пары импульсов с задержкой $2T$:

$$S'(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-pT}) (1 - e^{-2pT}).$$

Интегрируя сигнал (что соответствует умножению изображения на p^{-1}), имеем

$$S(p) = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-pT}) (1 - e^{-2pT}).$$

Используя принцип суммирования

сигналов и суммирования изображений, можно переходить от одиночных сигналов к сигналам, имеющим характер бесконечных последовательностей, в том числе и периодических (для $t > 0$), и делать обратные переходы.

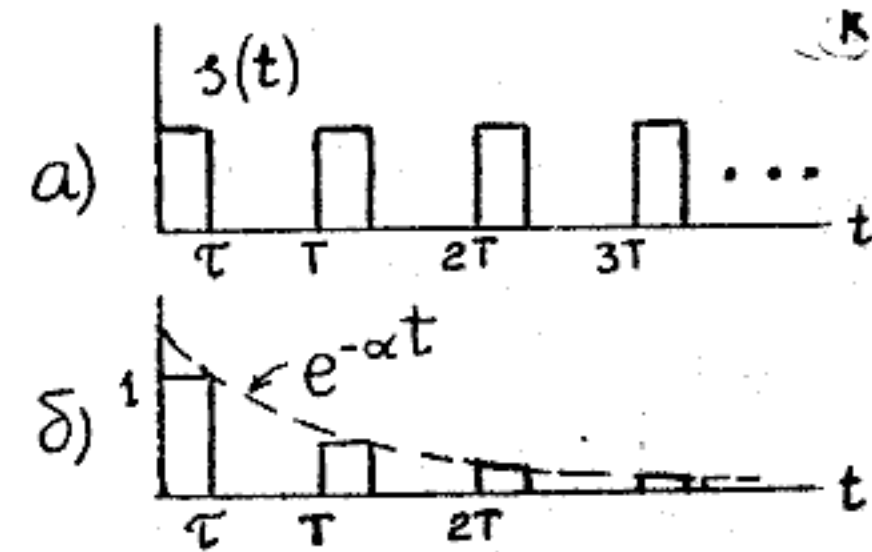


Рис. 3.3

У п р а ж н е н и е 3.3. Найти изображение бесконечной последовательности импульсов (рис. 3.3, а).

Используя изображение одиночного импульса $\frac{1}{p} (1 - e^{-pT})$, получим для данного случая бесконечный ряд:

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{p} (1 - e^{-pT}) [1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots] = \\ &= \frac{1}{p} (1 - e^{-pT}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT}. \end{aligned}$$

Бесконечный ряд можно просуммировать, пользуясь формулой суммы бесконечной прогрессии со знаменателем q :

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

В этом случае имеем

$$S(p) = \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}. \quad (3.1)$$

Заметим, что результат, естественно, совпадает с тем, который соответствует общему правилу: если $S_f(p)$ — изображение одиночного импульса $s_f(t)$, равного нулю при $t > T$, то

$$S_T(p) = \frac{S_f(p)}{1 - e^{-pT}} \quad (3.2)$$

является изображением периодического сигнала $s_T(t)$, один период которого есть сигнал $s_f(t)$ (см. приложение 2 п. 10).

У п р а ж н е н и е 3.4. Найти изображение бесконечной последовательности прямоугольных импульсов, амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону (рис. 3.3, б).

Можно воспользоваться тем же приемом — суммированием бесконечной геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{p} (1 - e^{-pT}) (1 + e^{-\alpha T} e^{-pT} + e^{-2\alpha T} e^{-2pT} + \dots) = \\ &= \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-pT}}{1 - e^{-\alpha T} e^{-pT}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим одно общее свойство: если сигнал периодический, незатухающий, то изображение сигнала обязательно имеет полюсы на мнимой оси; если же полюсы изображения находятся в левой полуплоскости, то сигнал не может быть периодическим.

Так, в рассмотренном примере член в знаменателе (3.1) $1 - e^{-pT}$ имеет корни p_k , при которых

$$e^{-p_k T} = 1 = e^{jk2\pi}; \quad p_k T = -jk2\pi, \quad (3.4)$$

т.е.

$$p_k = j \frac{k2\pi}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для случая (3.3) корни знаменателя

$$e^{-p_k T} = e^{-\alpha T} e^{jk2\pi},$$

откуда

$$p_k = -\alpha \pm jk \frac{2\pi}{T}.$$

Все корни лежат в левой полуплоскости. Правда, есть еще один корень $p_k = 0$, лежащий на мнимой оси. Однако легко убедиться, что вычет в этом корне равен нулю за счет числителя, также обращающегося в нуль при $p = 0$.

У п р а ж н е н и е 3.5. Найти изображение сигнала, представляющего собой один период синусоиды (рис. 3.4, а).

Можно использовать вычитание двух периодических (при $t > 0$) синусоидальных сигналов, изображения которых табличны:

$$S(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} e^{-pT} = \frac{\omega_0 (1 - e^{-pT})}{p^2 + \omega_0^2} \quad (3.5)$$

Убедимся, что полученное изображение не имеет полюсов на мнимой оси. Корни знаменателя $p_{1,2} = \pm j\omega_0$. Корни числителя $e^{-p_k T} = 1$; $p_k = \pm jk2\pi/T$. Два из них ($k = 1$) компенсируют полюсы

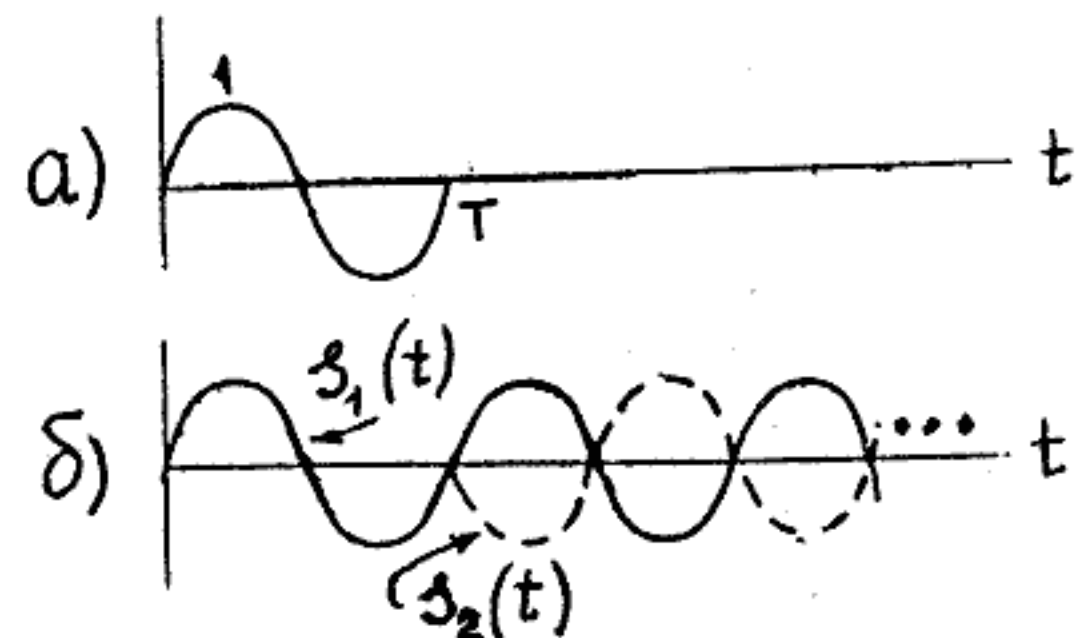


Рис. 3.4

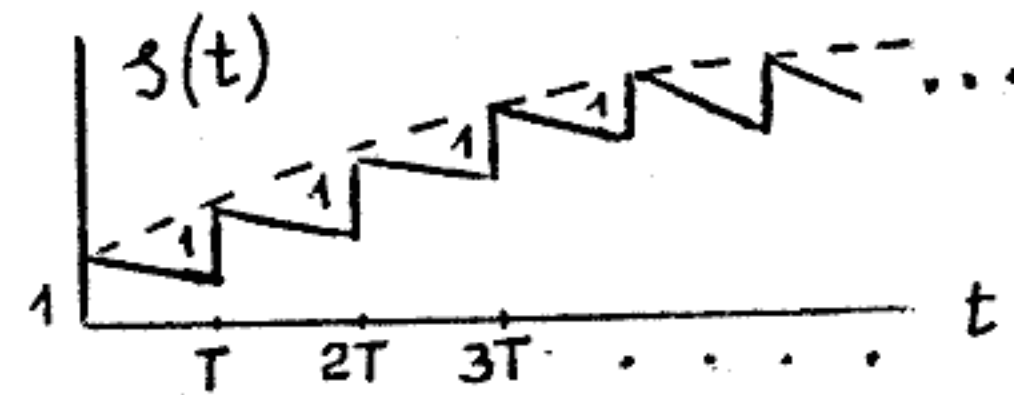


Рис. 3.5

У п р а ж н е н и е 3.6. На рис. 3.5 показан сигнал, являющийся суммой бесконечного ряда экспонент, следующих друг за другом через время T :

$$s(t) = e^{-\frac{t}{T}} 1(t) + e^{-\frac{t-T}{T}} 1(t-T) + e^{-\frac{t-2T}{T}} 1(t-2T) + \dots \quad (3.6)$$

Изображение $S(p)$ найдем, суммируя изображения отдельных слагаемых вида:

$$S(p) = \frac{1}{p + \frac{1}{T}} + \frac{1}{p + \frac{1}{T}} e^{-pT} + \dots = \frac{1}{p + \frac{1}{T}} \frac{1}{1 - e^{-pT}} \quad (3.7)$$

Заметим, что полученное изображение по своей структуре похоже на изображение периодического (для $t > 0$) сигнала, так как содержит в знаменателе характерный член $1 - e^{-pT}$ (ср. с формулой (3.2)). Если характер сигнала неизвестен, то можно подумать, что (3.7) — изображение некоторого периодического сигнала, у которого изображение одного из периодов

$$S_1(p) = S(p) (1 - e^{-pT}) = \frac{1}{p + \frac{1}{T}} \quad (3.8)$$

Это ошибка, поскольку сигнал, изображенный на рис. 3.5, не является периодическим. Надо помнить, что формула (3.2) справедлива только в том случае, если одиночный сигнал, изображение которого $S_1(p)$, тождественно равно нулю при $t > T$ или (что то же самое) если заведомо известно, что $S(p)$ — изображение периодического сигнала. В противном случае член $1 - e^{-pT}$ в знаменателе изображения означает не периодическое повторение, а бесконечное суммирование одинаковых запаздывающих сигналов, что совсем не обязательно дает периодический сигнал, поскольку суммирование начинается не с $-\infty$, а с $t = 0$.

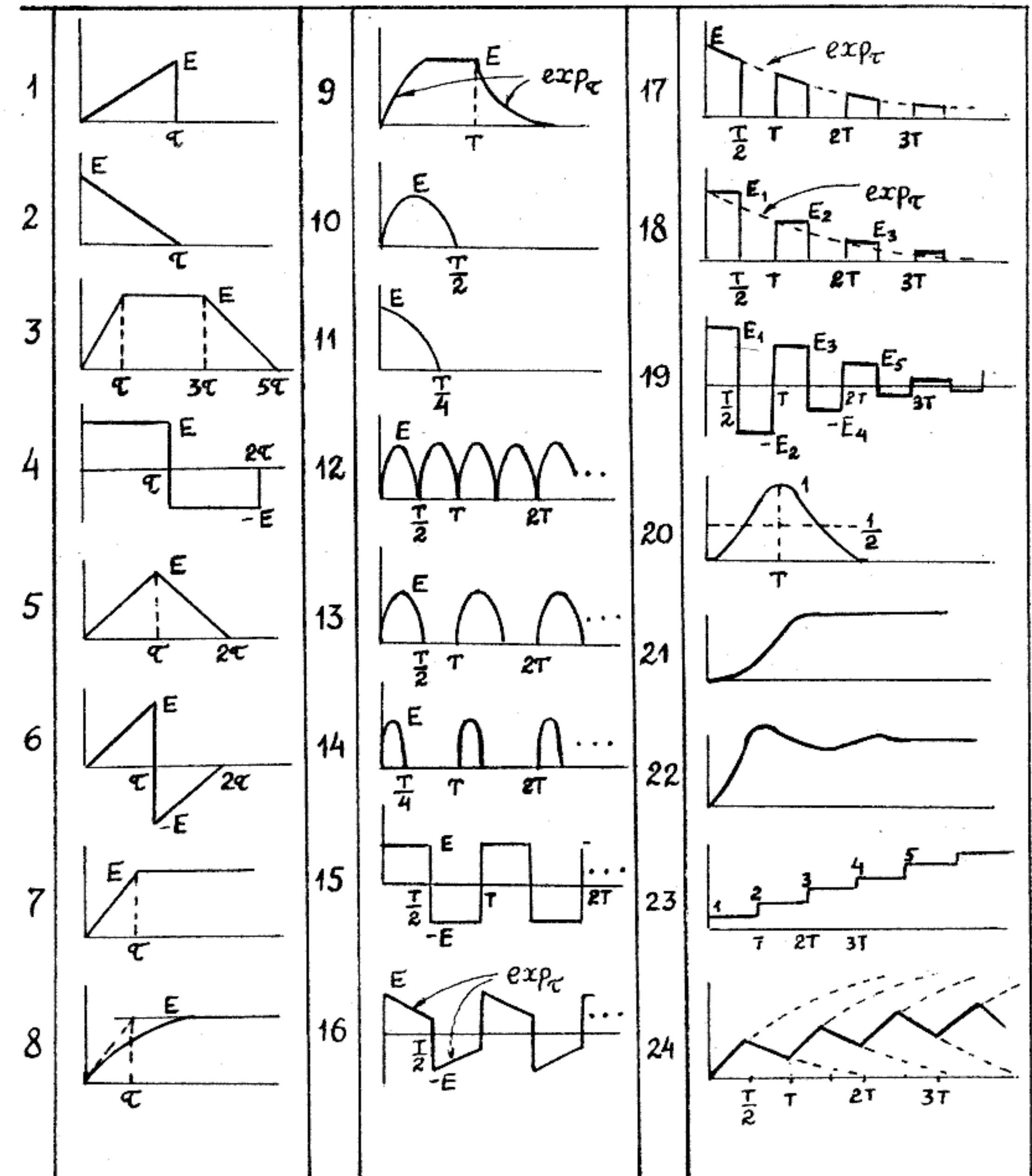


Рис. 3.6

ЗАДАЧИ

Найти изображения сигналов, приведенных на рис. 3.6. Для удобства, помимо рисунков, некоторые из этих сигналов даны в аналитической записи. Например:

$$8) s(t) = E(1 - e^{-t/\tau}), \quad t > 0;$$

$$9) s(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) I(t) - E(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}) I(t-T);$$

$$10) s(t) = \begin{cases} E \sin \frac{2\pi}{T} t, & 0 < t < T/2; \\ 0, & t > T/2; \end{cases}$$

$$11) s(t) = \begin{cases} E \cos \frac{2\pi}{T} t, & 0 < t < T/4; \\ 0, & t > T/4; \end{cases}$$

$$12) s(t) = E \left| \sin \frac{2\pi}{T} t \right|, \quad 0 < t < \infty;$$

$$13) s(t) = \begin{cases} E \left| \sin \frac{2\pi}{T} t \right|, & kT < t < (k + \frac{1}{2})T, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{вне этих интервалов;} \end{cases}$$

$$14) s(t) = \begin{cases} E \sin 2 \frac{2\pi}{T} t, & kT < t < (k + \frac{1}{4})T, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{вне этих интервалов;} \end{cases}$$

$$15) s(t) = tE, \text{ изменение знака каждые полпериода } (kT/2);$$

$$s(t) = E \operatorname{sgn}(\sin \frac{2\pi}{T} t); \text{ такой сигнал часто называют "меандром";}$$

$$16) s(t) = E e^{-\frac{t-kT/2}{\tau}} \operatorname{sgn}(\sin \frac{2\pi}{T} t); \text{ это сигнал типа "меандра",}$$

но с экспоненциальным спадом;

$$17) s(t) = \begin{cases} E e^{-t/\tau}, & kT < t < (k + \frac{1}{2})T, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{вне этих интервалов;} \end{cases}$$

$$18) s(t) = \begin{cases} E_k \text{ при } kT < t < (k + \frac{1}{2})T, \quad E_k = E_0 e^{-\frac{kT}{\tau}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{для остальных интервалов;} \end{cases}$$

$$19) s(t) = \begin{cases} +u_k \text{ при } kT < t < (k + \frac{1}{2})T, \text{ где } u_0 = 1; \\ -u_k \text{ при } (k + \frac{1}{2})T < t < (k + 1)T, \quad u_k = 0,9 u_{k-1}; \end{cases}$$

$$20) s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{T} t, & 0 < t < T; \\ 0, & t > T; \end{cases}$$

этот сигнал известен как "весовая функция" Хэмминга;

$$21) s(t) = \int_0^t t' e^{-t'/\tau} dt'; \text{ сигнал известен как модель "сглаженного скачка", в нем нет разрывов в сигнале и его производной;}$$

$$22) s(t) = 1 - e^{-\omega t} \cos \omega t; \text{ сигнал моделирует переходный процесс в системе второго порядка;}$$

$$23) s(t) = k, \quad (k-1)T < t < kT, \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

$$24) \text{ сигнал можно описать как сумму бесконечного ряда сигналов вида } tE(1 - e^{-t/\tau}) \text{ запаздывающих друг относительно друга на время } T/2, \text{ каждый раз с изменением знака:}$$

$$s(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) I(t) - E(1 - e^{-\frac{t-T/2}{\tau}}) I(t - \frac{T}{2}) + E(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}) I(t - T) - \dots$$

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

У п р а ж н е н и е 3.7. Определить сигнал по его изображению

$$S(p) = \frac{2p}{p^2 + 4p + 3}.$$

Разложим знаменатель на множители, для чего определим корни полинома знаменателя (полюсы $S(p)$):

$$p_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3}; \quad p_1 = -3, \quad p_2 = -1.$$

Корни простые, следовательно, возможно разложение $S(p)$ на две дроби:

$$S(p) = \frac{2p}{p^2 + 4p + 3} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+1}. \quad (3.9)$$

Определим неизвестные коэффициенты A и B . Домножим правую и левую части на $p+3$ и устремим $p \rightarrow -3$:

$$\left. \frac{2p(p+3)}{(p+3)(p+1)} \right|_{p \rightarrow -3} = \left. \frac{A(p+3)}{p+3} \right|_{p \rightarrow -3} + \left. \frac{B(p+3)}{p+1} \right|_{p \rightarrow -3}$$

Член с B обращается в нуль. Тогда имеем

$$\left. \frac{2p}{p+1} \right|_{p \rightarrow -3} = A - A = 3.$$

Аналогично для B :

$$\left. \frac{2p}{p+3} \right|_{p \rightarrow -1} = B - B = -1.$$

Проверим разложение:

$$\frac{3}{p+3} - \frac{1}{p+1} = \frac{3p+3-p-3}{(p+3)(p+1)} = \frac{2p}{p^2+4p+3}.$$

Переведем табличные изображения в сигналы (см. приложение I, п. 3):

$$s(t) = 3e^{-3t} - e^{-t}, \quad t > 0.$$

У п р а ж н е н и е 3.8. Найти сигнал по изображению

$$S(p) = \frac{2p^2 + 3p + 4}{(p+1)^2}.$$

Заметим, что степень числителя равна степени знаменателя, следовательно, в дроби содержится "белая" часть, не зависящая от p , а значит, в сигнале содержится δ -функция. Выделим ее, для чего разделим числитель на знаменатель:

$$\frac{2p^2 + 3p + 4}{2p^2 + 4p + 2} = \frac{p^2 + 2p + 1}{2}.$$

Тогда

$$\frac{2p^2 + 3p + 4}{(p+1)^2} = 2 - \frac{p-2}{(p+1)^2}.$$

Займемся вторым членом. Знаменатель дает полюс $p = -1$ кратности 2, следовательно, возможно разложение

$$\frac{p-2}{(p+1)^2} = \frac{A}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1}.$$

Определим A и B приведением к общему знаменателю:

$$\frac{A + Bp + B}{(p+1)^2} = \frac{p-2}{(p+1)^2}.$$

Определяем $B = 1$, $A = -3$. В результате получаем разложение

$$\frac{2p^2 + 3p + 4}{(p+1)^2} = 2 + \frac{3}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}.$$

Согласно таблицам (см. приложение I, пп. I, 3)

$$s(t) = 2\delta(t) + 3te^{-t} - e^{-t}, \quad t > 0.$$

У п р а ж н е н и е 3.9. Дано изображение

$$\frac{(p \cdot 2\sqrt{0,75} - \sqrt{2})(1 - e^{-p6\pi/\sqrt{2}})}{p^2 + 2}. \quad (3.10)$$

Определить соответствующий ему сигнал.

Наличие в числителе члена $1 - e^{-p \frac{6\pi}{\sqrt{2}}}$ свидетельствует о том, что сигнал $s(t) = s_1(t) - s_1(t - 6\pi/\sqrt{2})$.

Проанализируем изображение сигнала $s_1(t)$:

$$S_1(p) = \frac{p \cdot 2\sqrt{0,75} - \sqrt{2}}{p^2 + 2}. \quad (3.11)$$

Найдем полюсы: $p_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$. Это говорит о том, что сигнал гармонический с частотой $\omega = \sqrt{2}$, но с неизвестной амплитудой A и фазой φ . Табличное изображение (приложение I, п. II)

$$A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{Ap \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.12)$$

Из сравнения (3.11) и (3.12) видно, что

$$\begin{aligned} A \cos \varphi &= 2\sqrt{0,75}; \\ A \omega \sin \varphi &= \sqrt{2} \rightarrow A \sin \varphi = 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Найдем квадрат амплитуды:

$$A^2 = (A \cos \varphi)^2 + (A \sin \varphi)^2 = 4 \cdot 0,75 + 1 = 4,$$

откуда $A = 2$, $\sin \varphi = 0,5$, $\varphi = \pi/6$.

В результате имеем

$$s_1(t) = 2 \cos\left(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{6}\right), \quad t > 0.$$

Сигнал $s_2(t)$ такой же, но включается через $T = \frac{6\pi}{\sqrt{2}}$ и со знаком "-".

Нетрудно заметить, что при частоте $\omega = \sqrt{2}$ время T равно точно трем периодам. Следовательно, при $t > T$ произойдет полная компенсация двух сигналов $s(t) \equiv 0$ при $t > T$. Полученный сигнал изображен на рис. 3.7, а.

Заметим, что эффект компенсации можно было бы обнаружить по исходному выражению (3.10). Выяснив наличие полюсов на мнимой оси $p_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$,

следовало бы проверить, не компенсируются ли они нулями в числителе. Мы обнаружили бы, что выражение во вторых скобках числителя дает корни $p_k = \pm jk \frac{\sqrt{2}}{3}$, третьи "нули" ($k = 3$) совпадают с полюсами $p_{1,2}$ и компенсируют их. Следовательно, изображение $S(p)$ не содержит нулей на мнимой оси, и сигнал $s(t)$ не может быть периоди-

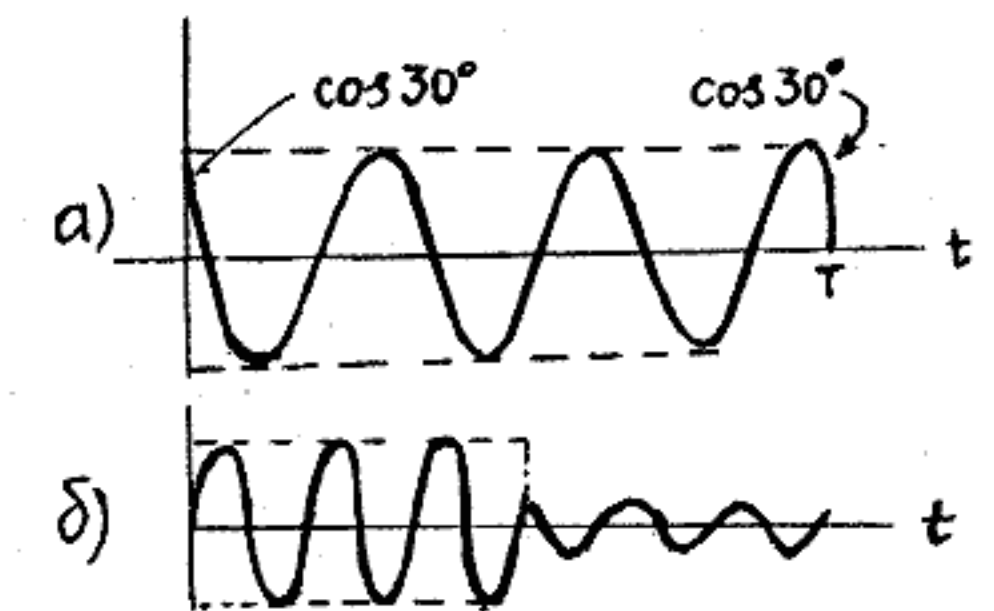


Рис. 3.7

ческим при $t \rightarrow \infty$. Если бы задержка была другой, мы получили бы сигнал вида, изображенного на рис. 3.7,б, не затухающий при $t \rightarrow \infty$.

У п р а ж н е н и е 3.10. Проанализируем изображение, полученное в упражнении 3.6 и соответствующее сигналу, показанному на рис. 3.5:

$$S(p) = \frac{1}{p + 1/\tau} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

Изображение содержит один полюс в левой полуплоскости $p_1 = -\frac{1}{\tau}$ и бесконечный ряд полюсов на мнимой оси $p_k = \pm jk \frac{2\pi}{T}$. Следовательно, сигнал содержит затухающую составляющую $S_1(t)$ и незатухающую составляющую $S_2(t)$, имеющую периодичность T . Выделим их отдельно:

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) = \frac{A}{p + 1/\tau} + S_2(p).$$

Определим неизвестную постоянную A методом, рассмотренным в упражнении 3.7:

$$\frac{1}{p + 1/\tau} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}} \left(p + \frac{1}{\tau} \right) \Big|_{p = -\frac{1}{\tau}} = A + S_2(p) \left(p + \frac{1}{\tau} \right) \Big|_{p = -\frac{1}{\tau}}.$$

В результате получим

$$A = \frac{1}{1 - e^{T/\tau}} = - \frac{1}{e^{T/\tau} - 1}.$$

Слагаемое $S_2(p)$ получим, вычтя из $S(p)$ найденную составляющую:

$$S_2(p) = \frac{1}{(p + \frac{1}{\tau})(1 - e^{-pT})} + \frac{1}{e^{T/\tau} - 1} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{e^{T/\tau} - 1} \frac{e^{T/\tau} - e^{-pT}}{(p + \frac{1}{\tau})(1 - e^{-pT})}. \quad (3.14)$$

По идее, это выражение должно соответствовать чисто периодическому сигналу, т.е. не содержать полюсов вне мнимой оси, но наличие множителя $p + \frac{1}{\tau}$ в знаменателе ставит наше предположение под сомнение. Однако нетрудно видеть, что этот полюс скомпенсирован нулем в числителе: $(e^{T/\tau} - e^{-pT}) \Big|_{p = -1/\tau} = 0$.

Поскольку $S_2(p)$ — изображение периодического сигнала, можно найти и изображение одного периода:

$$S_2'(p) = S_2(p)(1 - e^{-pT}) = \frac{e^{T/\tau}}{e^{T/\tau} - 1} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} - \frac{e^{-pT}}{e^{T/\tau} - 1}.$$

Итак, исходный сигнал содержит затухающую составляющую

$$S_1(t) = - \frac{1}{e^{T/\tau} - 1} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

и периодическую составляющую (рис. 3.8,в), каждый период которой описывается двумя экспонентами (рис. 3.8,б):

$$S_2'(t) = \frac{e^{T/\tau}}{e^{T/\tau} - 1} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{e^{T/\tau} - 1} e^{-\frac{t-T}{\tau}}.$$

Нетрудно убедиться, что вторая экспонента компенсирует первую при $t > T$. Таким образом, $S_2'(t)$ — импульс, не выходящий за пределы $0 \dots T$.

Рассмотренный нами в этом упражнении случай является характерным при воздействии включения некоторого периодического сигнала на цепь общего вида. Затухающая составляющая — это свободные колебания в цепи, вторая составляющая — вынужденные колебания в стационарном режиме. Их сумма описывает переходный режим (рис. 3.8,а).

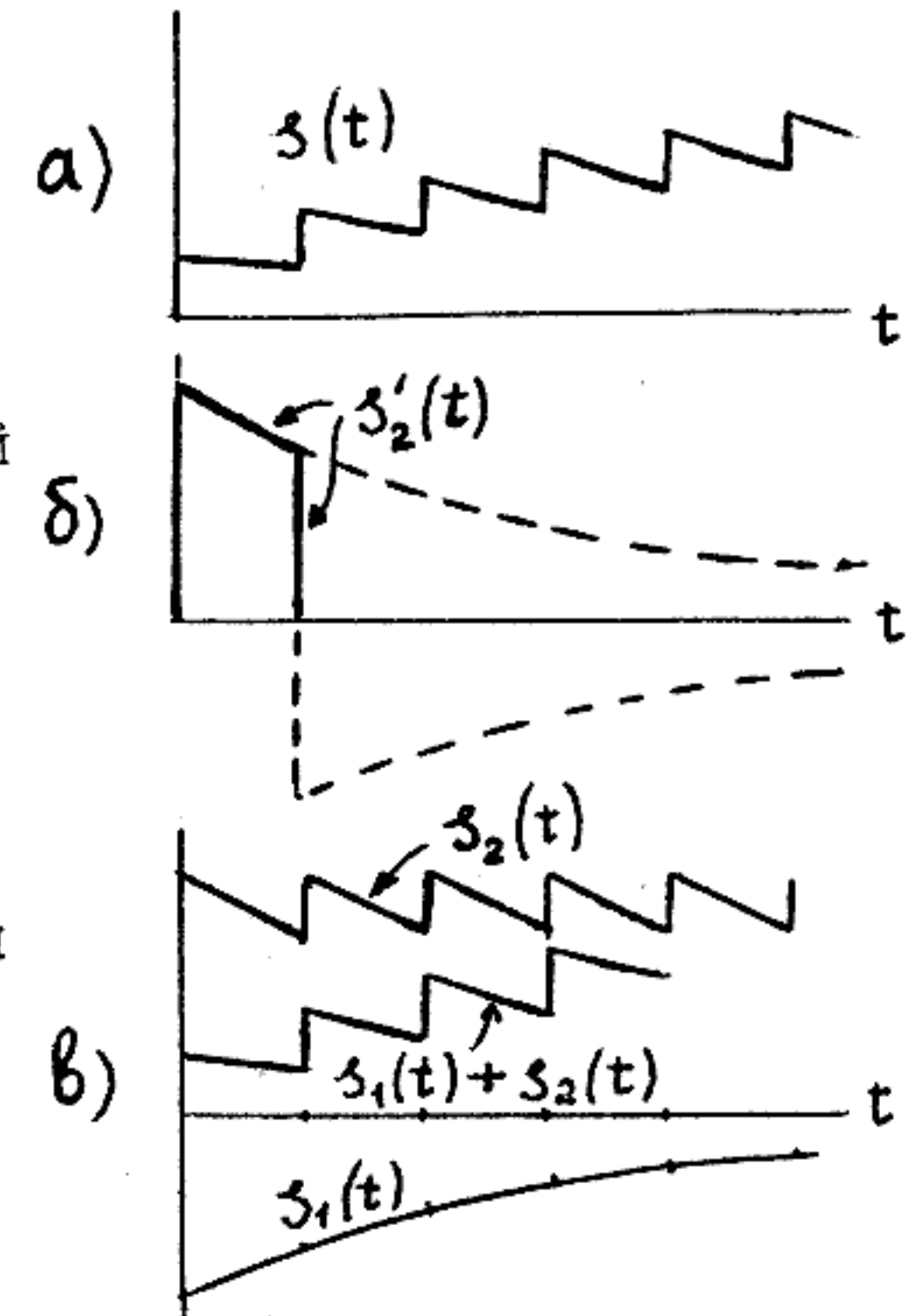


Рис. 3.8

ЗАДАЧИ

Найти сигналы по заданным изображениям, задавшись численными значениями параметров; изобразить приблизительно вид сигнала:

- 1) $\frac{a}{p(p-a)}$; 2) $\frac{1}{(1+p\tau)^2}$; 3) $\frac{p}{p^2-\omega^2}$; 4) $\frac{p}{(1+p\tau)^2}$;
- 5) $\frac{1}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}$; 6) $\frac{1}{p^2(p-a)}$; 7) $\frac{p+1}{p^2+1}$; 8) $\frac{1}{(p-a)(p-b)}$;
- 9) $\frac{1}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)^2}$; 10) $\frac{\omega^2}{p^2(p^2+\omega^2)}$; 11) $\frac{p+3}{p^2+p}$; 12) $\frac{1-e^{-(p+a)\tau}}{p+a}$;
- 13) $\frac{(1-e^{-pT})^2}{p}$; 14) $\frac{1}{\tau} \frac{(1-e^{-pT})^2}{p^2}$; 15) $\frac{e^{-pT_1} - e^{-pT_2}}{(T_2-T_1)p^2}$;

$$\begin{aligned} & \text{I6)} \frac{e^{-p\tau} + p\tau - 1}{p\tau^2}; \text{I7)} \frac{\omega(1 - e^{-\frac{6\pi}{\omega}p})}{p^2 + \omega^2}; \text{I8)} \frac{\omega(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}p})}{p^2 + \omega^2}; \\ & \text{I9)} \frac{\omega(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}p})}{(p^2 + \omega^2)(1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}p})}; \text{20)} \frac{1}{(p^2 + \omega^2)(1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}p})}; \text{2I)} \frac{1 - e^{-p\tau/2}}{p(1 - e^{-p\tau/2})}. \end{aligned}$$

4. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

У п р а ж н е н и е 4.1. Гармоническое напряжение приложено к параллельному соединению R и C . Определить токи $i_R(t)$, $i_C(t)$ и суммарный ток $i_\Sigma(t)$. Дано: $U = 1$ В, $f = 1$ кГц, $R = 10$ кОм, $C = 0,05$ мкФ.

Найдем комплексные амплитуды:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{1}{10 \cdot 10^3} = 0,1 \text{ мА};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{1/j\omega C} = j2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 10^{-6} = j0,314 \text{ мА};$$

$$\dot{I}_\Sigma = (0,1 + j0,314) \text{ мА}.$$

Найдем амплитуды и фазы комплексных величин:

$$\dot{I}_R = 0,1 e^{j0};$$

$$\dot{I}_C = 0,314 e^{j\pi/2};$$

$$\dot{I}_\Sigma = \sqrt{0,1^2 + 0,314^2} e^{j \arctg \frac{0,314}{0,1}} \approx 0,33 e^{j1,26}.$$

Запишем напряжение и токи как функции времени:

$$u(t) = 1 \cdot \cos 2\pi \cdot 10^3 t \text{ В};$$

$$i_R(t) = 0,1 \cdot \cos 2\pi \cdot 10^3 t \text{ мА};$$

$$i_C(t) = 0,314 \cos(2\pi \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{2}) \text{ мА};$$

$$i_\Sigma(t) = 0,33 \cos(2\pi \cdot 10^3 t + 1,26) \text{ мА}.$$

У п р а ж н е н и е 4.2. Цепочка RC (рис. 4.1, а) предназначена для создания фазового сдвига между входным и выходным напряжениями. Рассчитать сопротивление R так, чтобы при $C = 1000$ пФ и $f = 100$ кГц был обеспечен фазовый сдвиг $\varphi = -45^\circ$.

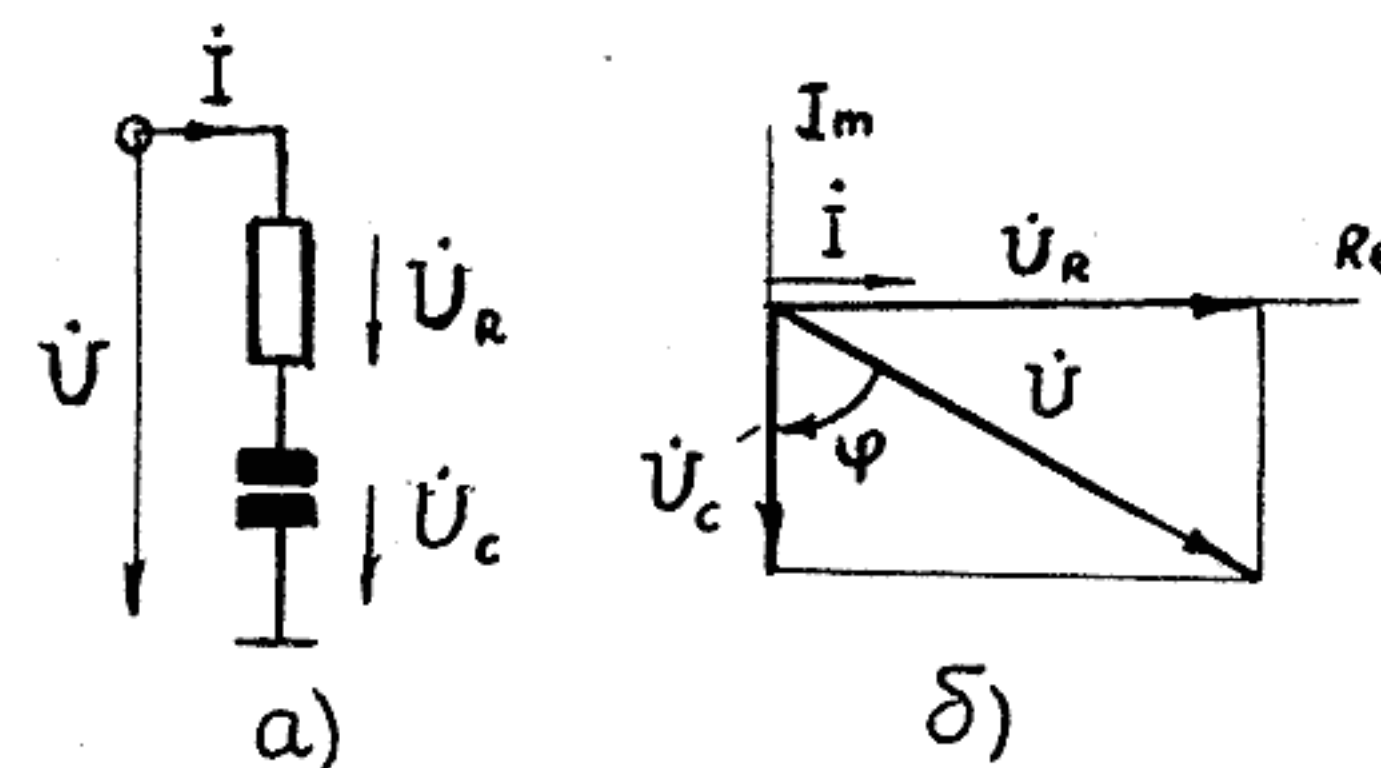


Рис. 4.1

По правилу делителя напряжения

$$\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}} = \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_R} = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} = \frac{1}{1 + j\omega CR}. \quad (4.1)$$

По заданию аргумент этого комплексного числа должен быть $\varphi = -45^\circ$. Аргумент дроби равен аргументу числителя минус аргумент знаменателя. Поскольку в числителе действительное число, то

$$\varphi = 0 - \arctg(1 + j\omega CR) = -\arctg \omega CR,$$

откуда

$$\omega CR = \operatorname{tg} 45^\circ = 1;$$

$$R = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 10^{-9}} \approx 1,6 \text{ кОм}.$$

Приведенным выкладкам соответствует векторная диаграмма, в которой все напряжения и токи изображены векторами. В данном случае построение векторной диаграммы имеет смысл начинать с указания вектора тока, поскольку он общий для всего делителя.

Пусть $\dot{I} = I$, тогда

$$\dot{U}_R = I \cdot R, \quad \dot{U}_C = \frac{I}{j\omega C} = -j \frac{I}{\omega C} = \frac{I}{\omega C} e^{-j\pi/2}.$$

Нанесем на график (рис. 4.1, б) векторы $\dot{U}_R$ и $\dot{U}_C$ пока что произвольной длины, но в правильном направлении. Их векторная сумма – входное напряжение $\dot{U}$. Сдвиг фазы выходного напряжения $\dot{U}_C$ относительно входного $\dot{U}$ соответствует углу φ на рис. 4.1, б. Очевидно, для получения $\varphi = -45^\circ$ необходимо равенство $|\dot{U}_R| = |\dot{U}_C|$ или $R = 1/\omega C$.

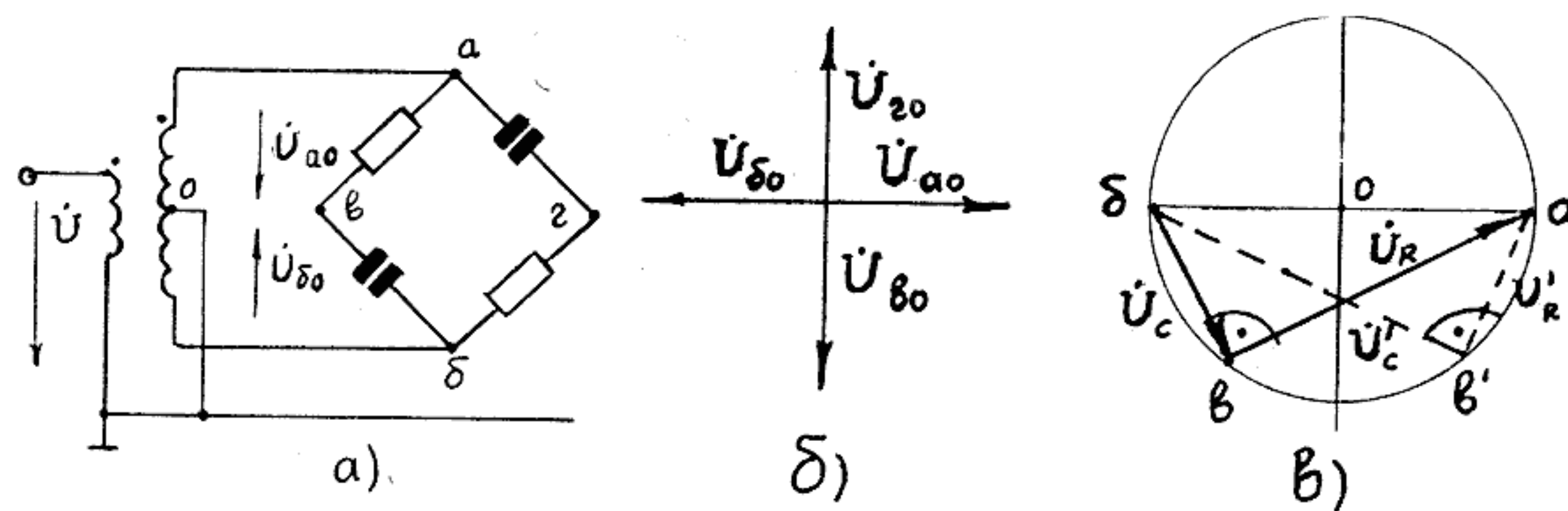


Рис. 4.2

У п р а ж н е н и е 4.3. Схема, приведенная на рис. 4.2,а, известна как "расщепляющий мост"; она предназначена для получения четырех напряжений, сдвинутых на 90° друг относительно друга. Два напряжения — в фазе с входным сигналом и в противофазе с ним — создаются с помощью идеального трансформатора с заземленной средней точкой. Напряжение $\dot{U}_{\alpha 0}$ (напряжение в точке α относительно корпуса) равно входному, а напряжение $\dot{U}_{\delta 0}$ находится в противофазе с ним:

$$\dot{U}_{\alpha 0} = \dot{U} e^{j0}, \quad \dot{U}_{\delta 0} = -\dot{U} = \dot{U} e^{j\pi}.$$

Получение двух других напряжений $\dot{U}_{\beta 0}$ и $\dot{U}_{\gamma 0}$, сдвинутых на $\pm \frac{\pi}{2}$, обеспечивается RC - и CR -делителями.

Рассмотрим цепь α - β - δ . Имеем

$$\dot{U}_{\beta 0} = \dot{U}_{\delta 0} + \dot{U}_{\alpha 0} \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = -\dot{U} + 2\dot{U} \frac{j\omega C}{R + j\omega C} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + j\omega CR} \dot{U}. \quad (4.2)$$

Найдем модуль и фазу $\dot{U}_{\beta 0}$. Модуль этой дроби удобно определять, переходя к модулям числителя и знаменателя в отдельности:

$$|\dot{U}_{\beta 0}| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} |\dot{U}| = |\dot{U}|. \quad (4.3)$$

Мы с удивлением замечаем, что независимо от параметров цепи модуль $|\dot{U}_{\beta 0}| = |\dot{U}|$. Аргумент $\varphi_{\beta 0}$ определим через аргументы числителя и знаменателя:

$$\varphi_{\beta 0} = \arctg(-\omega CR) - \arctg(\omega CR) = -2 \arctg \omega CR. \quad (4.4)$$

При $\omega CR = 1$ $\varphi_{\beta 0} = -\pi/2$.

Аналогичные выкладки для цепи α - γ - δ дают

$$\dot{U}_{\gamma 0} = \dot{U} e^{j\pi/2}.$$

Итак, при $\omega CR = 1$ схема "расщепила" вектор входного напряжения на четыре вектора (рис. 4.2,б):

$$\dot{U}_{\alpha 0} = \dot{U}, \quad \dot{U}_{\delta 0} = \dot{U} e^{j\pi}, \quad \dot{U}_{\beta 0} = \dot{U} e^{-j\pi/2}, \quad \dot{U}_{\gamma 0} = \dot{U} e^{j\pi/2}.$$

Заметим, что векторная диаграмма (рис. 4.2,в) дает наглядное геометрическое объяснение того факта, что модули векторов $\dot{U}_{\beta 0}$ и $\dot{U}_{\gamma 0}$ не зависят от параметров цепи, а фазы равны $\pm \frac{\pi}{2}$ при равенстве $R = \frac{1}{\omega C}$.

Сумма векторов $\dot{U}_{\delta\beta}$ и $\dot{U}_{\beta\alpha}$ равна вектору $\dot{U}_{\delta\alpha}$, причем $\dot{U}_{\delta\beta} \perp \dot{U}_{\beta\alpha}$. Прямоугольный треугольник с вершиной β опирается на основание $\delta\alpha$. Следовательно, его вершина лежит на окружности диаметром $\delta\alpha$ независимо от соотношения сторон. При уменьшении R точка β перейдет в точку β' , но длина $O\beta = O\beta'$. При равенстве длин $|\dot{U}_{\delta\beta}| = |\dot{U}_{\beta\alpha}|$ вектор $\dot{U}_{\beta 0} \perp \dot{U}_{\alpha 0}$.

У п р а ж н е н и е 4.4. На рис. 4.3,а приведен фрагмент некоторой цепи с обозначением выбранного направления токов. Токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ найдены из предыдущих расчетов:

$$\dot{I}_1 = 1,5 e^{j50^\circ}, \quad \dot{I}_2 = \frac{3}{2 - j0,6}, \quad \dot{I}_3 = 3 e^{j45^\circ} (0,5 + j1).$$

Требуется найти ток $\dot{I}_4$ и построить векторную диаграмму.

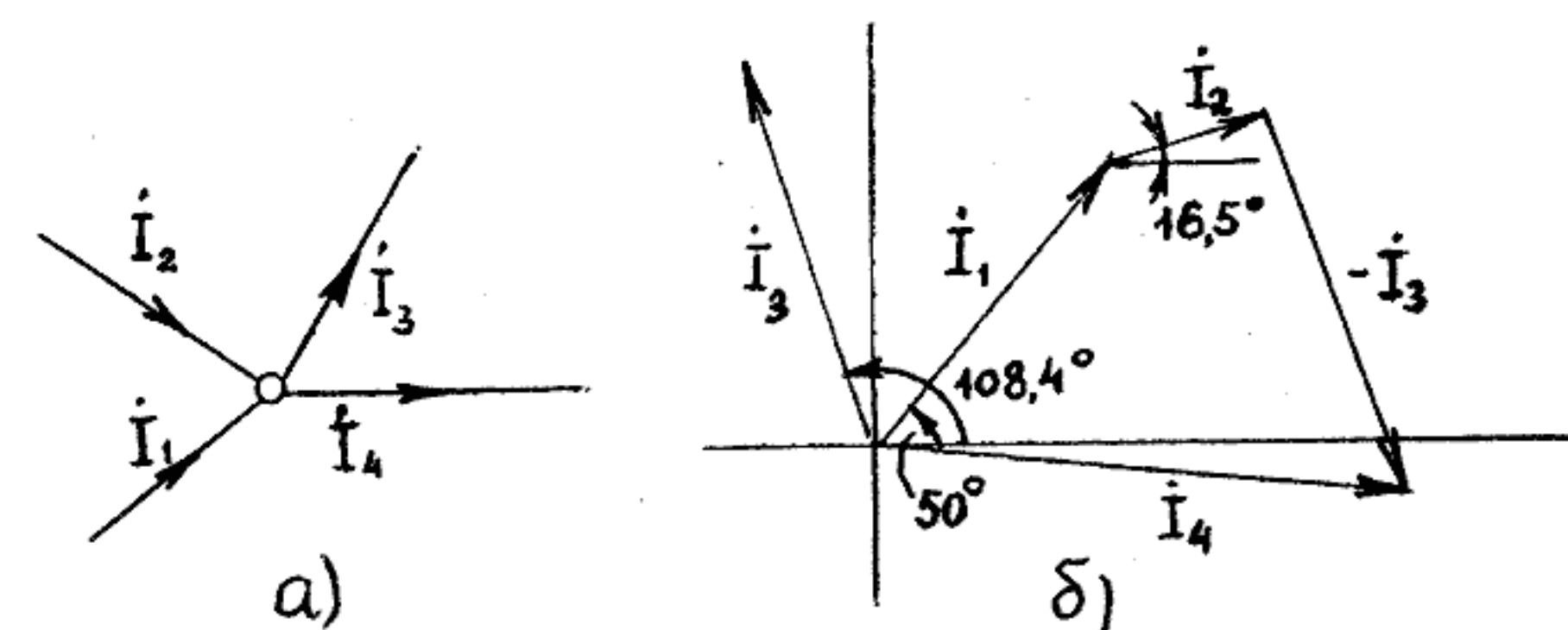


Рис. 4.3

Исходя из указанных направлений токов для данного узла имеем

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 - \dot{I}_4 = 0. \quad (4.5)$$

Аналитически операцию сложения – вычитания удобнее проводить при записи комплексных чисел в проекциях, а при построении векторной диаграммы с помощью линейки и транспортира – при записи в показательной форме. Выразим токи в двух формах:

$$\dot{I}_1 = 1,5 e^{j50^\circ} = 1,5 (\cos 50^\circ + j \sin 50^\circ) = 1,93 + j2,3;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{3}{2 - j0,6} = \frac{3(2 + j0,6)}{2^2 + 0,6^2} = 1,38 + j0,41 = 1,44 e^{j16,5^\circ};$$

$$\dot{I}_3 = 3 (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) (0,5 + j) = -1,06 + j3,18 = 3,35 e^{j108,5^\circ};$$

$$\dot{I}_4 = 1,93 + j2,3 + 1,38 + j0,41 + 1,06 - j3,18 = 4,37 - j0,47 = 4,4 e^{-j6^\circ}.$$

На рис. 4.3,б построена векторная диаграмма $\dot{I}_4 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3$.

У п р а ж н е н и е 4.5. На рис. 4.4,а приведена схема фильтра нижних частот третьего порядка. Требуется получить частотную характеристику и рассчитать параметры L_1, L_2, C так, чтобы АЧХ приобрела вид

$$|K(\omega)| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{rp})^6}} \quad (4.6)$$

Значения граничной частоты ω_{rp} и нагрузки R заданы.

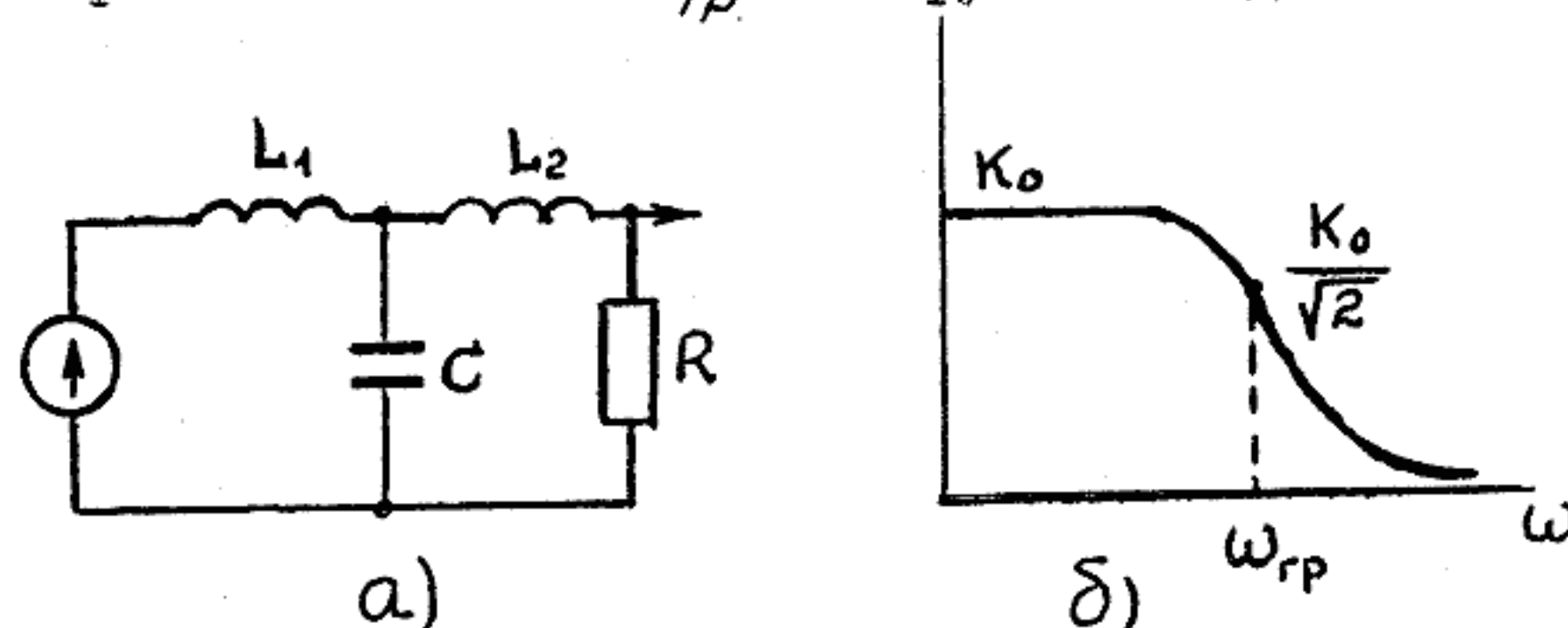


Рис. 4.4

Формула (4.6) известна как характеристика фильтра Баттерворта, отличающаяся максимально "плоским" ходом АЧХ (рис. 4.4,б). Поскольку схема имеет лестничную структуру, можно применить удобную методику, описанную в [1]. Для этого нужно записать выражение для входного сопротивления в виде цепной дроби

$$Z_{BX} = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 \dots}}},$$

где Z_i – сопротивления последовательных элементов, а Y_j – проводимости параллельных элементов. В нашем случае

$$Z_{BX} = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L_2 + 1/G}},$$

где $G = 1/R$ – проводимость нагрузки.

Приведем цепную дробь к виду обычной дроби:

$$Z_{BX} = \frac{-j\omega^3 CL_1 L_2 G - \omega^2 L_1 C + j\omega(L_1 + L_2)G + 1}{-\omega^2 CL_2 G + j\omega C + G}.$$

Как показано в [1], коэффициент передачи лестничной структуры обратен числителю полученного выражения:

$$K(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 CL_1 L_2 G - \omega^2 L_1 C + j\omega(L_1 + L_2)G + 1}.$$

Переходим к АЧХ:

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 L_1 C)^2 + (\omega(L_1 + L_2)G - \omega^3 CL_1 L_2 G)^2}} \quad (4.7)$$

Раскрыв скобки, найдем коэффициенты при разных степенях ω и приравняем их к соответствующим коэффициентам для получения фильтра Баттерворта (4.6):

$$\omega^0: 1 = 1;$$

$$\omega^2: (L_1 + L_2)^2 G^2 - 2L_1 C = 0;$$

$$\omega^4: L_1 C - 2CL_1 L_2 (L_1 + L_2) G^2 = 0;$$

$$\omega^6: C^2 L_1^2 L_2^2 G^2 = 1/\omega_{rp}^6.$$

Из трех уравнений определяем

$$L_1 = L_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{R}{\omega_{rp}}; \quad C = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{\omega_{rp} R}.$$

У п р а ж н е н и е 4.6. Определить АЧХ резонансного усилителя, схема которого дана на рис. 4.5,а, при следующих данных: $L_1 = 0,1$ мГн, $L_2 = 0,2$ мГн, $C = 26700$ пФ, добротность контура $Q = 50$, крутизна транзистора $S = 50$ мА/В, выходное сопротивление коллектора $R_K = 1$ кОм.

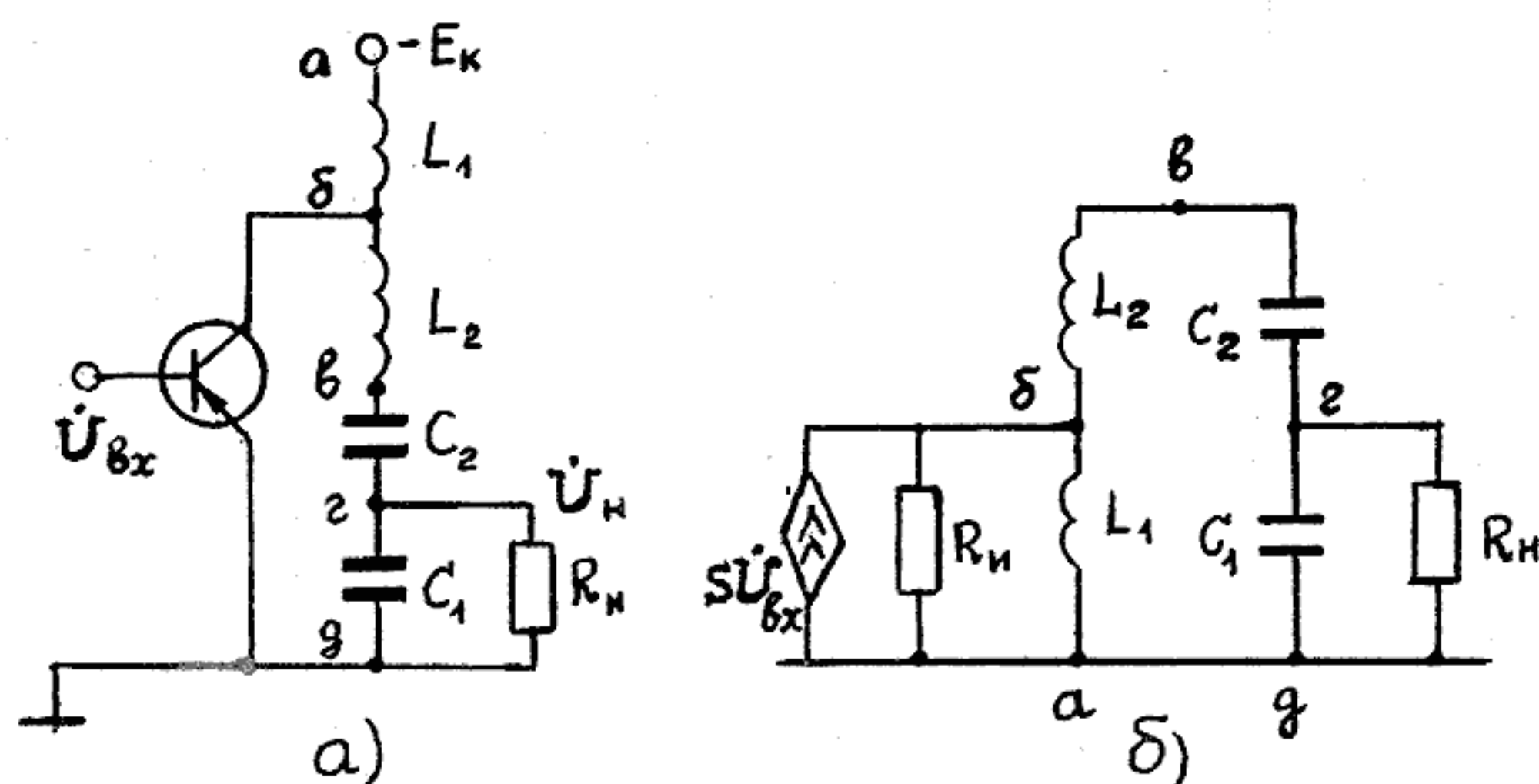


Рис. 4.5

Составим схему замещения (рис. 4.5, б). При этом для транзистора возьмем простейшую схему замещения: управляемый источник коллекторного тока $I = S U_{Бx}$ с выходным сопротивлением $R_H = R_K$. Поскольку схема замещения учитывает только переменные составляющие токов и напряжений, шина подачи напряжения питания E_K (точка a) и шина "корпуса" (точка g) в схеме замещения составляют одну и ту же точку.

Теперь наглядно видно, что схема представляет собой параллельный резонансный контур с частичным включением источника и нагрузки. Если добротность "нагруженного" контура (т.е. с учетом шунтирующего действия R_H и R_H) остается высокой (больше десяти), то для получения АЧХ нет необходимости составлять уравнения токов и напряжений на элементах контура. Можно воспользоваться приближенной АЧХ простого резонансного контура, определив лишь эффективную добротность Q_3 , резонансную частоту ω_p и резонансный коэффициент усиления K_D .

Найдем основные параметры контура. Резонансная частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

где L_0 и C_0 — индуктивность и емкость последовательных соединений:

$$L_0 = L_1 + L_2 = 0,3 \text{ мГн}, \quad C_0 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = 8000 \text{ пФ}.$$

Тогда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-9}}} = 0,645 \cdot 10^6 \text{ рад/с}, \quad f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 100 \text{ кГц}.$$

Характеристическое сопротивление ρ и сопротивление потерь r_n равны соответственно

$$\rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 194 \text{ Ом}, \quad r_n = \frac{\rho}{Q} = 3,88 \text{ Ом}.$$

Учтем сопротивления потерь r_H и r_H , вносимые подключением R_H и R_H , с коэффициентами включения x_H и x_H . Коэффициенты включения равны отношению сопротивления связи к общему сопротивлению:

$$x_H = L_1 / L_0 = 0,33, \quad x_H = C_0 / C_1 = 0,3.$$

Вносимые сопротивления потерь будут

$$r_H = \frac{x_H^2 \rho^2}{R_H} = \frac{0,33^2 \cdot 1,94}{4000} \approx 1 \text{ Ом},$$

$$r_H = \frac{x_H^2 \rho}{R_H} \approx 3,39 \text{ Ом}.$$

Общее сопротивление потерь

$$r_{\Sigma} = r_n + r_H + r_H = 8,27 \text{ Ом}.$$

Следовательно, эффективная добротность нагруженного контура

$$Q_3 = \rho / r_{\Sigma} \approx 23,5.$$

Поскольку добротность достаточно велика, можно использовать приближенные выражения для АЧХ как функции расстройки:

$$|K(\Delta\omega)| \approx \frac{K_{рез}}{\sqrt{1 + (2Q_3 \frac{\Delta\omega}{\omega_p})^2}}.$$

Остается найти величину $K_{рез}$. Резонансное сопротивление контура при добротности Q_3

$$R_{рез} = \rho Q_3 = 4560 \text{ Ом}.$$

Источник тока I_K заменяем источником меньшего тока $x_H I_K$, но включенным на весь контур. Напряжение на нем при резонансе равно

$$U_{крес} = x_H I_K R_{рез} = x_H S R_{рез} U_{Бx}.$$

Напряжение на нагрузке $U_{н.рез} = x_H U_{крес}$.

Отсюда

$$K_{рез} = x_H x_H S R_{рез} = 23.$$

Итак,

$$K(\Delta f) \cong \frac{23}{\sqrt{1 + \left(47 \frac{\Delta f}{10^5}\right)^2}}$$

ЗАДАЧИ

4.1. Для схем, структуры которых приведены на рис. 2.12 - 2.27:

1) выбрать один из источников и те индуктивности и емкости структуры, которые позволят реализовать фильтр Баттерворта нижних частот третьего порядка;

2) выбрать расположение полюсов и определить желаемую характеристику фильтра Баттерворта;

3) определить приближенно параметры сопротивлений, индуктивностей и емкостей, обеспечивающие желаемую частотную характеристику фильтра Баттерворта;

4) рассчитать и изобразить в виде графика амплитудно-частотную характеристику фильтра Баттерворта.

При проведении расчетов задаться желаемой частотой среза $f_{гр} = 10 \dots 100$ кГц.

4.2. Для схем с управляемыми источниками (рис. 2.28 - 2.43) дополнить структуры реактивными элементами так, чтобы получить резонансный усилитель с частичным включением управляемого источника и (или) нагрузки второго порядка. Выбрать параметры схемы таким образом, чтобы приближенно обеспечить добротность $Q = 50 \dots 100$, резонансную частоту $f_p = 100 \dots 300$ кГц и резонансное усиление $K_{рез} = 200 \dots 500$.

Для выбранных параметров элементов определить и построить амплитудно-частотную характеристику резонансного усилителя, показать, как она будет изменяться при подстройке одного из сопротивлений схемы, наибольшим образом влияющим на добротность усилителя.

1. ОСНОВНЫЕ ТАБЛИЧНЫЕ ПАРЫ

Сигнал при	Изображение	Полюсы
I) $\delta(t)$	I	
2) $1(t)$	$1/p$	$p = 0$
3) $1(t-T)$	$\frac{1}{p} e^{-pT}$	$p = 0$
4) $e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$p = -\alpha$
5) $e^{-j\omega t}$	$\frac{1}{p+j\omega}$	$p = -j\omega$
6) t	$\frac{1}{p^2}$	$p = 0$ (кратн. 2)
7) t^2	$\frac{2}{p^3}$	$p = 0$ (кратн. 3)
8) $t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$p = -\alpha$ (кратн. 2)
9) $t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$p = -\alpha$ (кратн. $n+1$)
10) $\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
11) $\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
12) $\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
13) $e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi + \alpha \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega^2}$	$p = -\alpha \pm j\omega$

Отсюда

$$K_{рез} = x_H x_H S R_{рез} = 23.$$

Итак,

$$K(\Delta f) \cong \frac{23}{\sqrt{1 + \left(47 \frac{\Delta f}{10^5}\right)^2}}$$

ЗАДАЧИ

4.1. Для схем, структуры которых приведены на рис. 2.12 - 2.27:

1) выбрать один из источников и те индуктивности и емкости структуры, которые позволят реализовать фильтр Баттерворта нижних частот третьего порядка;

2) выбрать расположение полюсов и определить желаемую характеристику фильтра Баттерворта;

3) определить приближенно параметры сопротивлений, индуктивностей и емкостей, обеспечивающие желаемую частотную характеристику фильтра Баттерворта;

4) рассчитать и изобразить в виде графика амплитудно-частотную характеристику фильтра Баттерворта.

При проведении расчетов задаться желаемой частотой среза $f_{ср} = 10 \dots 100$ кГц.

4.2. Для схем с управляемыми источниками (рис. 2.28 - 2.43) дополнить структуры реактивными элементами так, чтобы получить резонансный усилитель с частичным включением управляемого источника и (или) нагрузки второго порядка. Выбрать параметры схемы таким образом, чтобы приближенно обеспечить добротность $Q = 50 \dots 100$, резонансную частоту $f_p = 100 \dots 300$ кГц и резонансное усиление $K_{рез} = 200 \dots 500$.

Для выбранных параметров элементов определить и построить амплитудно-частотную характеристику резонансного усилителя, показать, как она будет изменяться при подстройке одного из сопротивлений схемы, наибольшим образом влияющим на добротность усилителя.

1. ОСНОВНЫЕ ТАБЛИЧНЫЕ ПАРЫ

Сигнал при	Изображение	Полюсы
I) $\delta(t)$	1	
2) $1(t)$	$1/p$	$p = 0$
3) $1(t-T)$	$\frac{1}{p} e^{-pT}$	$p = 0$
4) $e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$p = -\alpha$
5) $e^{-j\omega t}$	$\frac{1}{p+j\omega}$	$p = -j\omega$
6) t	$\frac{1}{p^2}$	$p = 0$ (кратн. 2)
7) t^2	$\frac{2}{p^3}$	$p = 0$ (кратн. 3)
8) $t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$p = -\alpha$ (кратн. 2)
9) $t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$p = -\alpha$ (кратн. $n+1$)
10) $\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
11) $\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
12) $\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
13) $e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi + \alpha \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega^2}$	$p = -\alpha \pm j\omega$

Отсюда

$$K_{рез} = x_H x_H S R_{рез} = 23.$$

Итак,

$$K(\Delta f) \cong \frac{23}{\sqrt{1 + \left(47 \frac{\Delta f}{10^5}\right)^2}}$$

ЗАДАЧИ

4.1. Для схем, структуры которых приведены на рис. 2.12 - 2.27:

1) выбрать один из источников и те индуктивности и емкости структуры, которые позволят реализовать фильтр Баттерворта нижних частот третьего порядка;

2) выбрать расположение полюсов и определить желаемую характеристику фильтра Баттерворта;

3) определить приближенно параметры сопротивлений, индуктивностей и емкостей, обеспечивающие желаемую частотную характеристику фильтра Баттерворта;

4) рассчитать и изобразить в виде графика амплитудно-частотную характеристику фильтра Баттерворта.

При проведении расчетов задаться желаемой частотой среза $f_{гр} = 10 \dots 100$ кГц.

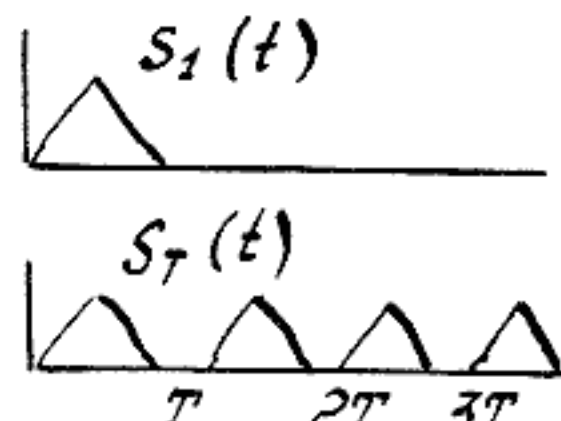
4.2. Для схем с управляемыми источниками (рис. 2.28 - 2.43) дополнить структуры реактивными элементами так, чтобы получить резонансный усилитель с частичным включением управляемого источника и (или) нагрузки второго порядка. Выбрать параметры схемы таким образом, чтобы приближенно обеспечить добротность $Q = 50 \dots 100$, резонансную частоту $f_p = 100 \dots 300$ кГц и резонансное усиление $K_{рез} = 200 \dots 500$.

Для выбранных параметров элементов определить и построить амплитудно-частотную характеристику резонансного усилителя, показать, как она будет изменяться при подстройке одного из сопротивлений схемы, наибольшим образом влияющим на добротность усилителя.

1. ОСНОВНЫЕ ТАБЛИЧНЫЕ ПАРЫ

Сигнал при	Изображение	Полюсы
I) $\delta(t)$	I	
2) $1(t)$	$1/p$	$p = 0$
3) $1(t-T)$	$\frac{1}{p} e^{-pT}$	$p = 0$
4) $e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$p = -\alpha$
5) $e^{-j\omega t}$	$\frac{1}{p+j\omega}$	$p = -j\omega$
6) t	$\frac{1}{p^2}$	$p = 0$ (кратн. 2)
7) t^2	$\frac{2}{p^3}$	$p = 0$ (кратн. 3)
8) $t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$p = -\alpha$ (кратн. 2)
9) $t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$p = -\alpha$ (кратн. $n+1$)
10) $\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
11) $\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
12) $\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$	$p = \pm j\omega$
13) $e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi + \alpha \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega^2}$	$p = -\alpha \pm j\omega$

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Основные операции	Сигнал	Изображение
Линейная комбинация (1)	$s(t) = A s_1(t) + B s_2(t)$	$S(p) = A S_1(p) + B S_2(p)$
Дифференцирование (2)	$s(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$S(p) = pX(p) - x(0)$
Интегрирование (3)	$s(t) = \int_0^t x(t') dt' + s(0)$	$S(p) = \frac{X(p)}{p} + \frac{s(0)}{p}$
Сдвиг во времени (4)	$s(t) = x(t - \tau)$	$S(p) = X(p) e^{-p\tau}$
Изменение масштаба (5)	$s(t) = x(\alpha t)$	$S(p) = \frac{1}{ \alpha } X\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
Умножение на t (6)	$s(t) = t x(t)$	$S(p) = -\frac{dX(p)}{dp}$
Умножение на $e^{-\alpha t}$ (7)	$s(t) = e^{-\alpha t} x(t)$	$S(p) = X(p + \alpha)$
Умножение сигналов (8)	$s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S(p) = S_1(p) * S_2(p)$
Свертка сигналов (9)	$s(t) = s_1(t) * s_2(t)$	$S(p) = S_1(p) S_2(p)$
Периодическое продолжение одиночного импульса (10)		$S_T(p) = \frac{S_1(p)}{1 - e^{-pT}}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (временной анализ): Учеб. пособие. - М.: Изд-во МАИ, 1992.
2. Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (частотный анализ): Учеб. пособие. - М.: Изд-во МАИ, 1992.
3. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2 ч. - М.: Мир, 1988.
4. Шебес М.Р., Каблуква М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие. - М.: Высшая школа, 1990.
5. Воробийко П.П. Теория линейных электрических цепей: Сборник задач и упражнений: Учеб. пособие. - М.: Радио и связь, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Основные понятия теории радиоэлектронных цепей	4
2. Основы анализа линейных цепей	13
3. Сигналы и их изображения по Лапласу	24
3.1. Определение изображения по сигналу	25
3.2. Определение сигнала по изображению	31
4. Символический метод	36
Приложение	45
Литература	47

Тем. план 1994, поз. 88

Кузнецов Юрий Владимирович
Тронин Юрий Владимирович

ЛИНЕЙНЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ ЦЕПИ
И СИГНАЛЫ (упражнения и задачи)

Редактор Р.М. Белозерова
Техн. редактор В.Н. Горячева

Подписано в печать 21.09.94

Бум. офсетная. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная
Усл. печ. л. 2,79 . Уч.-изд. л. 3,00 . Тираж 1000
Зак. 2269/ 841. С129.

Типография издательства МАИ
125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4