

Лекция №15.

([1] стр. 64-67)

Математическое описание дискретных сигналов

Идеальный дискретный сигнал

Идеальный дискретный сигнал формируется в результате умножения аналогового сигнала на периодическую последовательность δ функций. Тогда аналитически этот сигнал можно описать в виде

$$S_{TH}(t) = S(t) \cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)}_{Y_{TH}(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nT) \delta(t - nT)$$

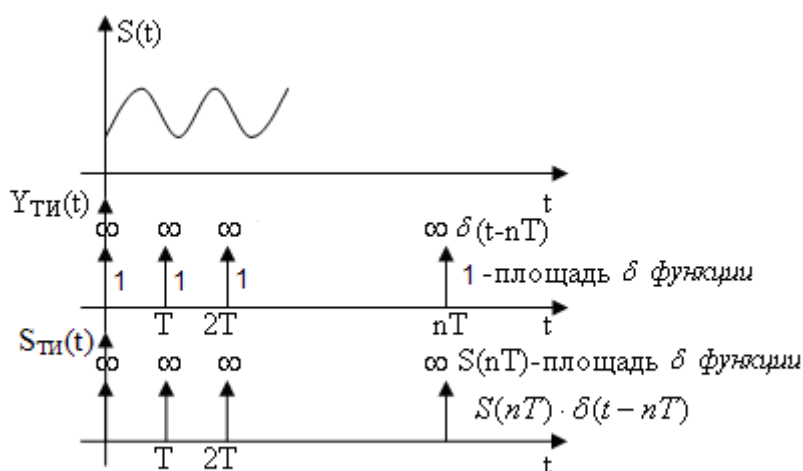


Рис.15.1

На рисунке 15.1. изображены исходный аналоговый сигнал $S(t)$, периодическая последовательность δ функций $Y_{TH}(t)$ и идеальный дискретный сигнал $S_{TH}(t)$. Идеальный дискретный сигнал фактически представляет собой последовательность δ функций, но поскольку каждая из них умножается на число, равное значению отсчета $S(nT)$ дискретного сигнала, то площади этих δ функций будут равны значению соответствующего отсчета.

Найдем спектр идеального дискретного сигнала. Для этого сначала разложим в тригонометрический ряд Фурье периодическую последовательность δ функций $Y_{TH}(t)$. Поскольку $Y_{TH}(t)$ – четная функция, то коэффициенты $b_n = 0$. Период повторения функции $Y_{TH}(t)$ равен интервалу дискретизации T . Тогда частота первой гармоники $\omega_1 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ и

$$Y_{TH}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

Используя фильтрующее свойство δ функции, определим коэффициенты a_n . Тогда

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T}; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cos(n\omega_d t) dt = \frac{2}{T} \text{ и периодическую}$$

последовательность δ функций можно записать в виде

$$Y_{\text{ТИ}}(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_d t).$$

Тогда идеальный дискретный сигнал $S_{\text{ТИ}}(t) = \frac{S(t)}{T} + \frac{2S(t)}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_d t)$. Для определения спектра сигнала найдем его преобразование Фурье $F\{\dots\} : \dot{S}_{\text{ТИ}}(\omega) = F^{-1}\{S_{\text{ТИ}}(t)\}$. Обозначим спектр аналогового сигнала как $\dot{S}(\omega)$. Тогда

$$F^{-1}\left\{\frac{S(t)}{T}\right\} = \frac{\dot{S}(\omega)}{T}$$

$$F^{-1}\left\{\frac{2S(t)}{T} \cos(n\omega_d t)\right\} = \frac{\dot{S}(\omega - n\omega_d)}{T} + \frac{\dot{S}(\omega + n\omega_d)}{T} \quad (\text{см. свойство преобразования}$$

Фурье об умножении сигнала на гармоническую функцию)

$$\dot{S}_{\text{ТИ}}(\omega) = \frac{\dot{S}(\omega)}{T} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{S}(\omega - n\omega_d) + \dot{S}(\omega + n\omega_d) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega + k\omega_d)$$

Из полученной формулы следует, что спектр идеального дискретного сигнала – периодическая функция частоты, повторяющая спектр аналогового сигнала с периодом равным частоте дискретизации ω_d .

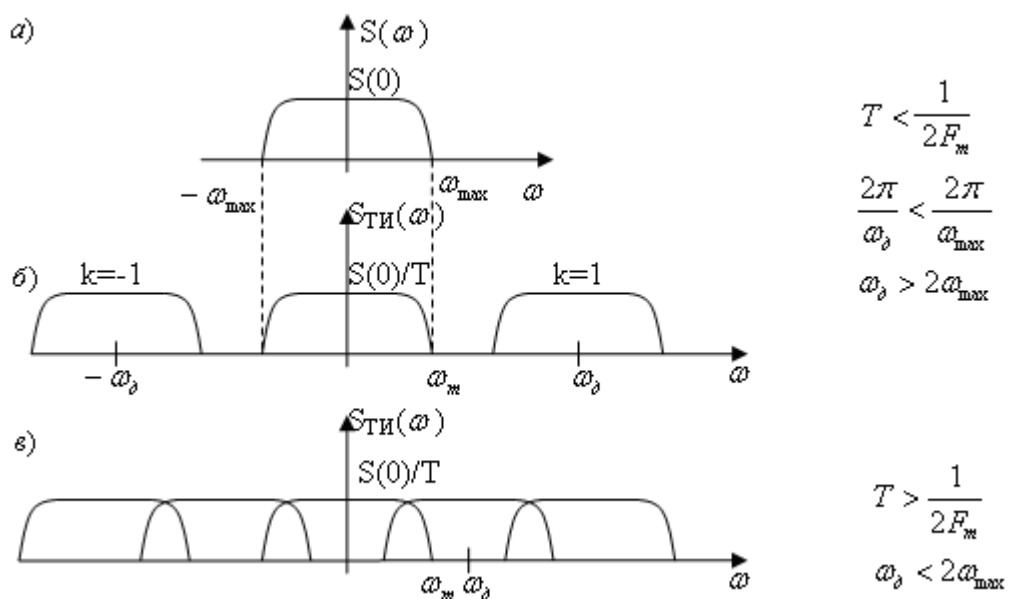


Рис. 15.2. Влияние интервала дискретизации на спектр идеального дискретного сигнала.

На рисунке 15.2 изображены спектр аналогового сигнала (рис15.2а), спектр идеального дискретного сигнала, когда условие теоремы Котельникова выполняется (рис15.2.б), то есть когда $T < \frac{1}{2F_{\max}}$ и спектр идеального дискретного сигнала, когда условие теоремы

Котельникова не выполняется (рис15.2.в) то есть когда $T > \frac{1}{2F_{\max}}$.

Если условие теоремы Котельникова выполняется, то отдельные периоды спектра не налегают друг на друга, при условии, что спектр аналогового сигнала конечной ширины (см. рис. 15б)

Если условие теоремы Котельникова не выполняется, то отдельные периоды спектра налегают друг на друга (см. рис. 15в).

Для восстановления аналогового сигнала из дискретного достаточно пропустить его через ФНЧ.

Восстановление аналогового сигнала из дискретного без искажений можно осуществить только при выполнении условия теоремы Котельникова, когда отдельные периоды спектра дискретного сигнала не перекрываются.

Реальные дискретные сигналы.

Сигнал на входе АЦП (аналого-цифрового преобразователя)

Сигнал на входе АЦП формируется перемножением аналогового сигнала $S(t)$ на периодическую последовательность прямоугольных импульсов $Y_T(t)$: $S_T(t) = S(t) \cdot Y_T(t)$ (см. рис.15.3).

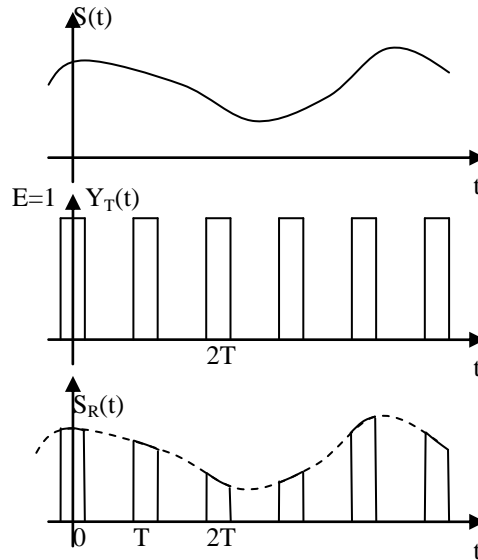


Рис. 15.3. Сигнал на входе АЦП

Тогда спектр сигнала равен свертке спектров сомножителей:

$$\dot{S}_T(\omega) = \dot{S}(\omega) * \dot{Y}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(x) \cdot \dot{Y}_T(\omega - x) dx.$$

Определим спектральную плотность периодической последовательности прямоугольных импульсов. Для этого представим ее в виде тригонометрического ряда Фурье и затем вычислим преобразование Фурье от этого ряда. Тогда

$$Y_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t),$$

где $A_0 = \frac{E\tau_u}{T} = \frac{\tau_u}{T}$ ($E = 1$), $A_n = \frac{2E}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n \tau_u}{T}\right) = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n \tau_u}{T}\right)$ ($E = 1, n \geq 1$).

На рисунке 15.4. изображена зависимость коэффициентов ряда Фурье от частоты.

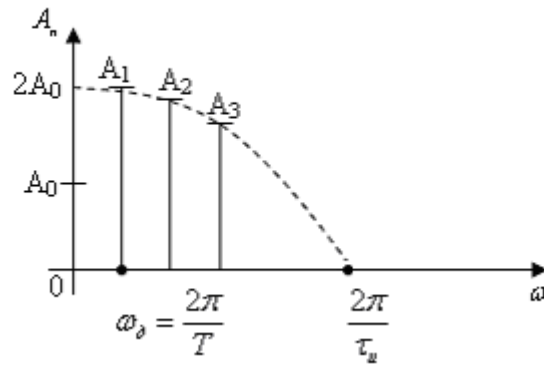


Рис.15.4. Зависимость коэффициентов ряда Фурье от частоты

Тогда спектральная плотность периодической последовательности прямоугольных импульсов

$$\dot{Y}(\omega) = A_0 \cdot 2\pi\delta(\omega) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta(\omega + n\omega_\delta) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta(\omega - n\omega_\delta),$$

а спектральная плотность дискретного сигнала на входе АЦП

$$\begin{aligned} \dot{S}_T(\omega) &= \dot{S}(\omega) * \dot{Y}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(x) \cdot Y(\omega - x) dx = \\ &= A_0 \cdot \dot{S}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \dot{S}(\omega + n\omega_\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \dot{S}(\omega - n\omega_\delta) \end{aligned}$$

На рисунке 15.5 изображены спектры аналогового сигнала и дискретного сигнала на входе АЦП.

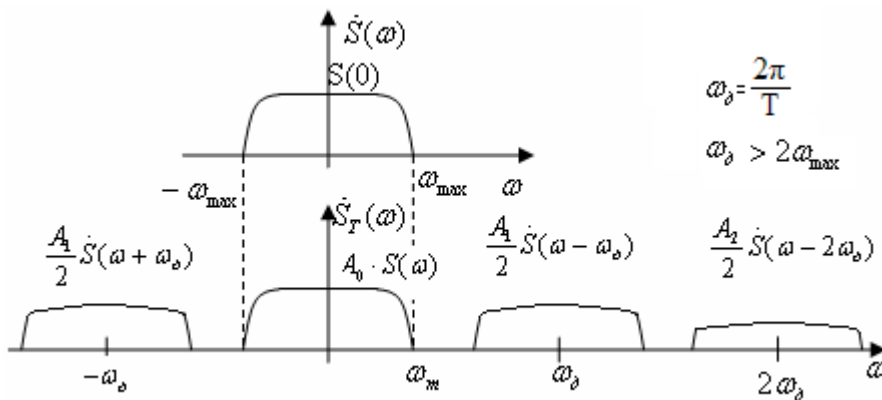


Рис15.5. Спектры аналогового сигнала и дискретного сигнала на входе АЦП

Из полученных результатов следует, что
 - спектр реального дискретного сигнала на входе АЦП также носит периодический характер, но в отличие от спектра идеального сигнала, каждый следующий период реального сигнала меньше предыдущего и затухает тем быстрее, чем больше τ_u .

- форма каждого периода спектра с точностью до постоянного коэффициента повторяет форму спектра аналогового сигнала.

Следовательно, если условие теоремы Котельникова выполняется, то из дискретного сигнала, действующего на входе АЦП, можно восстановить аналоговый сигнал без искажения.

Дискретный сигнал, формируемый запоминанием выборочного значения на фиксированное время (сигнал на выходе ЦАП).

Сигнал на выходе ЦАП математически описывается сверткой идеального дискретного сигнала $S_{TH}(t)$ с одиночным прямоугольным импульсом $V_0(t)$:

$$S_{T \text{ ЦАП}}(t) = S_{TH}(t) * V_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{TH}(x) \cdot V_0(t-x) dx$$

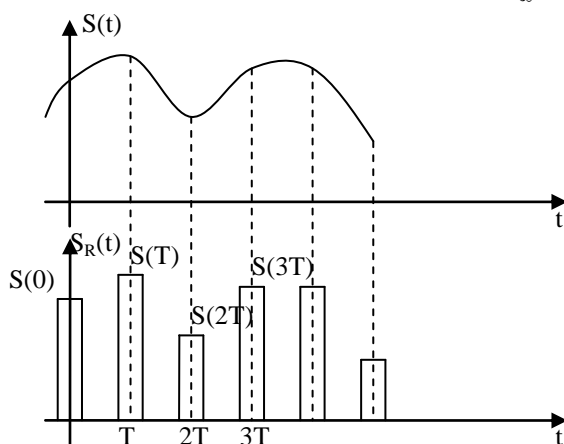


Рис. 15.6. Аналоговый сигнал и сигнал на выходе ЦАП

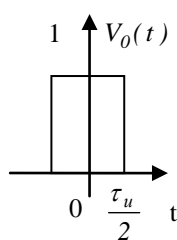


Рис. 15.7. Одиночный прямоугольный импульс.

На рисунке 15.6. изображены аналоговый сигнал и сигнал на выходе ЦАП, а на рисунке 15.7 – одиночный прямоугольный импульс.

Если сигнал формируется в результате свертки двух сигналов, то его спектр равен произведению спектров сворачиваемых сигналов (свойство преобразования Фурье).

Вспомним, что спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса

$$V_0(j\omega) = E\tau_u \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right) = 1 \cdot \tau_u \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right) \text{ при } E=1.$$

Идеальный дискретный сигнал $S_{TH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nT) \cdot \delta(t - nT)$, а его спектр

$$\dot{S}_{TH}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega + k\omega_\delta), \text{ где } \dot{S}(\omega) - \text{ спектр аналогового сигнала. Реальный дискретный сигнал}$$

на выходе ЦАП математически описывается сверткой идеального дискретного сигнала $S_{ИТ}(T)$ с одиночным прямоугольным импульсом $V_0(t)$, то есть

$$S_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{TH}(\tau) \cdot V_0(t - \tau) d\tau = S_T(t) * V_0(t), \text{ где знак } * \text{ означает свертку сигналов.}$$

Тогда его спектр $\dot{S}_T(\omega)$ равен произведению спектров идеального дискретного сигнала и одиночного прямоугольного импульса (см. рис 15.8), то есть

$$\dot{S}_T(\omega) = V_0(j\omega) \cdot \dot{S}_{TH}(\omega) = 1 \cdot \tau_u \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau_u}{2}\right) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega + k\omega_\delta) = \frac{\tau_u}{T} \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau_u}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega + k\omega_\delta)$$

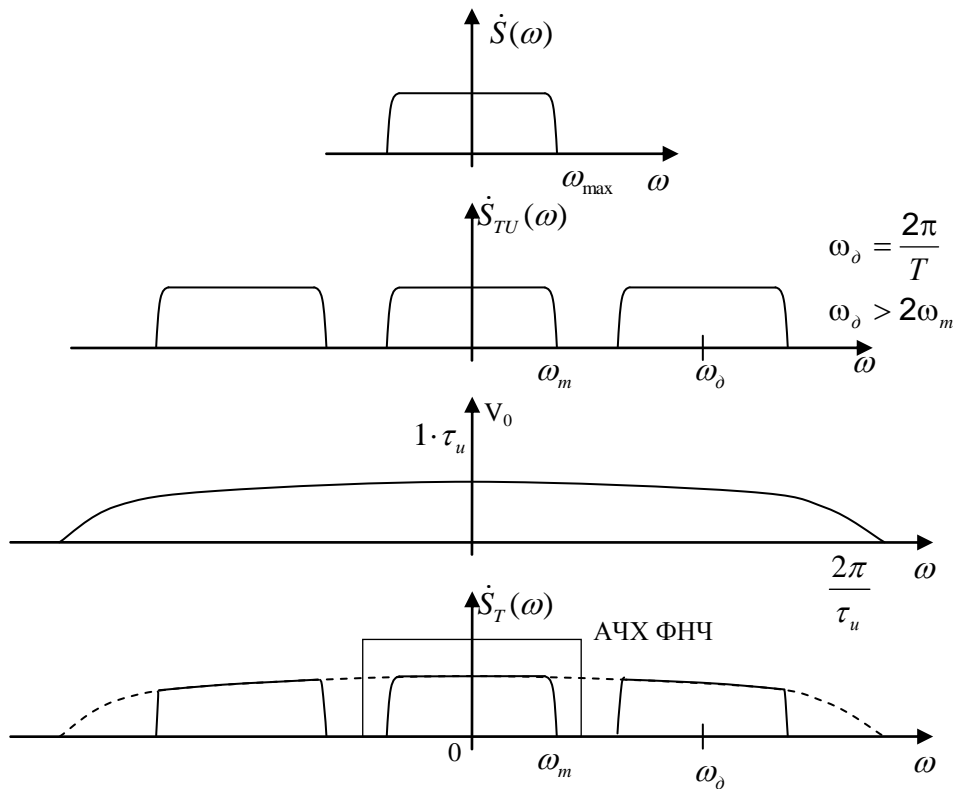


Рис.15.8. Определение спектра реального дискретного сигнала на выходе ЦАП.

Рисунок 15.8 иллюстрирует процесс определения спектра реального дискретного сигнала на выходе ЦАП при $\omega_d > 2\omega_m$. На этом рисунке друг под другом изображены соответственно спектр аналогового сигнала, спектр идеального дискретного сигнала, спектр одиночного прямоугольного импульса и спектр реального дискретного сигнала на выходе ЦАП. Кроме того, из рисунка следует, что для получения аналогового сигнала из дискретного необходимо последний пропустить через ФНЧ.

Из полученных результатов следует, что в отличие от дискретного сигнала на входе АЦП, дискретный сигнал на выходе ЦАП имеет спектр, по которому даже при выполнении теоремы Котельникова восстановить исходный аналоговый сигнал абсолютно точно (без искажения) не удастся. Это объясняется искажением формы центрального периода спектра. Для уменьшения искажений надо уменьшить $\tau_{и}$, но при этом уменьшится мощность исходного сигнала и, следовательно, его помехоустойчивость.

Контрольные вопросы

1. Каким основным свойством обладает спектр идеального дискретного сигнала?
2. Почему нельзя восстановить аналоговый сигнал из дискретного, если не выполняется условие теоремы Котельникова?
3. Каким образом можно восстановить аналоговый сигнал из дискретного ?
4. В чем принципиальное отличие спектра реального дискретного сигнала на входе АЦП от спектра реального дискретного сигнала на выходе ЦАП?
5. Почему даже при выполнении теоремы Котельникова не удастся абсолютно точно (без искажения) восстановить исходный аналоговый сигнал из реального дискретного сигнала, сформированного на выходе ЦАП?
6. Как уменьшить искажения аналогового сигнала, полученного из дискретного сигнала, действующего на выходе ЦАП?
7. Какой сигнал можно получить на выходе полосового фильтра, пропускающего один из периодов спектра дискретного сигнала?

Типовые задачи к экзамену

1. Идеальный дискретный сигнал получен дискретизацией аналогового сигнала $s(t) = U_0 + E \cos 2\pi f_0 t$ с интервалом дискретизации T . Изобразите двухсторонний амплитудный спектр дискретного сигнала, если: а) $f_0 = 2 \cdot 10^3$ [Гц]; б) $f_0 = 6 \cdot 10^3$ и в обоих случаях $T = 125 \cdot 10^{-6}$ [сек], $U_0/E = 2$. Изобразите сигнал на выходе идеального фильтра низких частот с равномерной АЧХ в полосе частот $f \in [-F_1; F_1]$, если $F_1 = 3 \cdot 10^3$ [Гц], а на вход фильтра подан полученный выше дискретный сигнал. На рисунке обязательно укажите масштаб по оси абсцисс.
2. Прямоугольный импульс длительностью $\tau_{и}$ и амплитудой E пропущен через идеальный фильтр низких частот с равномерной АЧХ в полосе частот $f \in [-F_1; F_1]$, $F_1 = 1/\tau_{и}$. Изобразите модуль спектра идеального дискретного сигнала, полученного дискретизацией прямоугольного импульса с интервалом T , выбранным в соответствии с теоремой Котельникова. Определите значения первых семи отсчетов дискретного сигнала, если сигнал начинается при $t=0$.
3. Аналоговый сигнал $S(t) = A_0 + A_1 \cos(2\pi Ft) + A_2 \cos(4\pi Ft)$. Интервал дискретизации $T = 1/(8F)$. Построить спектр реального дискретного сигнала на входе АЦП, если длительность дискретизирующего импульса $\tau_{и} = 0,2T$, $A_0 = 2B$, $A_1 = 2B$, $A_2 = 1B$, $F = 10^3$ Гц.
4. Аналоговый сигнал $S(t) = A_0 + A_1 \cos(2\pi Ft) + A_2 \cos(4\pi Ft)$. Интервал дискретизации $T = 1/(8F)$. Построить спектр реального дискретного сигнала на выходе ЦАП, если длительность дискретизирующего импульса $\tau_{и} = 0,2T$, $A_0 = 2B$, $A_1 = 2B$, $A_2 = 1B$, $F = 10^3$ Гц.